UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Sonderübungsblatt (Tribute to Wolfgang Pauli)

Algebraische Bestimmung des Wasserstoff-Spektrums

1. Wie in der klassischen Mechanik ist auch in der QM der Lenz'sche Vektor
$$\vec{A} = \frac{\vec{x}}{r} + \frac{1}{2Ze^2m}(\vec{L} \times \vec{p} - \vec{p} \times \vec{L})$$
eine Konstante der Bewegung. Zeigen Sie, dass $[H, \vec{A}] = 0$, wobei
$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}.$$

2. Zeigen Sie ferner, dass die Operatoren $\vec{A}$ und $\vec{L}$ die folgenden Vertauschungsrelationen erfüllen:
$$[A_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}A_k$$

3. Leiten Sie auch die folgenden Vertauschungsrelationen:
$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \, \frac{-2H}{(Ze^2)^2m}.$$

4. Verifizieren Sie die Identitäten:
$$\vec{A} \cdot \vec{L} + \vec{L} \cdot \vec{A} = 0,$$
$$A^2 = \frac{2}{m(Ze^2)^2}(\vec{L}^2 + 1)H \, + 1.$$

5. Zur Bestimmung der gebundenen Zustände, $H < 0$, führen Sie die Operatoren

$$K_i = \sqrt{\frac{m}{-2H}} Ze^2 A_i$$

ein, die die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}
[\vec{K}, H] &= 0, \\
[K_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} L_k \\
[K_i, L_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k \\
[L_i, L_j] &= i\epsilon_{ijk} L_k
\end{aligned}$$

erfüllen. Zeigen Sie, dass es gilt auch

$$\begin{aligned}
\vec{K} \cdot \vec{L} + \vec{L} \cdot \vec{K} &= 0, \\
H &= -\frac{(Ze^2)^2 m}{2(\vec{K}^2 + \vec{L}^2 + 1)}.
\end{aligned}$$

6. Überzeugen Sie sich, dass die Operatoren

$$\vec{M} = (\vec{L} + \vec{K})/2, \qquad \vec{N} = (\vec{L} - \vec{K})/2$$

zwei kommutierenden "Drehimpulse" sind, welche mit H vertauschen. Die Symmetriegruppe des Problems ist also $SU(2) \times SU(2)$.

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}
M^2 &= N^2 \\
H &= -\frac{(Ze^2)^2 m}{2(4M^2 + 1)},
\end{aligned}$$

und bestimmen Sie das diskrete Spektrum von H, den Entartungsgrad eines Eigenwerts von H, sowie die zugehörigen Werte des Drehimpulses.