UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Übungen zur

Quantenmechanik II
Aufgaben

Leipzig, Sommersemester 2007

1. Einfache fermionische Systeme

In einem Potential existieren drei gebundene Zustände, $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ mit Energien E_0 , E_1 , E_2. Konstruieren Sie die (antisymmetriesierten) Zustände eines zwei-Elektron-Systems in diesem Potential, und finden Sie die Energien dieser Zustände.

2. Verschränkung von Zuständen

Betrachten Sie den Zustand eines zwei-Elektron-Systems,

$$\psi = \frac{|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass der Zustand <u>nicht</u> ins Produkt

$$\psi = (a|0\rangle + b|1\rangle)(c|0\rangle + d|1\rangle) \tag{2}$$

zerlegt werden kann (a, b, c, d sind beliebige Zahlen, die Zustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ sind orthogonal).

3. Wellenpakete von zwei Elektronen

Zei $f(x)$, $g(x)$ zwei beliebige, reele und positive Wellenfunktionen. Normieren Sie den zwei-Elektron-Wellenpaket

$$\psi(x,y) = N[f(x)g(y) - f(y)g(x)]. \tag{3}$$

(D.h. drucken Sie N als eine Funktion des Skalarproduktes (f,g) aus.) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür einen (von den beiden) Elektron an der Stelle x zu finden:

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{12}(x,y)|^2 \, dy. \tag{4}$$

Skizzieren Sie $W(x)$ im Fall $f(x) = \exp[-x^2]$, $g(x) = f(x+d)$ für verschiedene Abstände d. Wie sieht ein bosonisches Analogon (symmetriezierte $\psi(x,y)$) aus?

4. Entartungsdruck

Betrachten Sie drei identische Teilchen in einem Kastenpotential der Länge L (d.h. die Wellenfunktionen müssen bei $x = 0$ und bei $x = L$ verschwinden). Bestimmen Sie die Dreiteilchenwellenfuntionen niedrigster Energie: die symmetrisierte (für Bosonen) und die antisymmetrisierte (für Fermionen). Welchen Energien entsprechen diese Wellenfunktionen? Leiten Sie die Energien nach L ab, und bestimmen Sie auf diese Weise die Kräfte mit den ein Teilchen auf die Wände wirken.

Falls möglich, diskutieren Sie den Fall von N Fermionen/Bosonen im Kastenpotential. Wie wachset der Bosonen-/Fermionen-Druck mit N?

5. Addition von Drehimpulsen

Ein quantenmechanisches System besteht aus zwei Teilchen, jeweils mit Spins 3/2 und 1/2. Bekanntlich lässt sich der acht-dimensionale Hilbertraum $\mathcal{H}_{3/2} \times \mathcal{H}_{1/2}$ in eine direkten Summe von Eigenräumen des (quadrierten) Gesamtdrehimpulses,

$$J = j \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes j,$$

zerlegen (die Clebsch-Gordan Konstruktion). Drücken Sie explizit alle Zustände $|Jm\rangle$ mit $J = 2, m = -2 \ldots 2$ und $J = 1, m = -1, 0, 1$ als Linearkombinationen von $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ mit $m_1 = -\frac{3}{2} \ldots \frac{3}{2}$ und $m_2 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ aus.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die extreme Zustände $|22\rangle$ und $|11\rangle$, und finden Sie danach alle andere Zustände durch sukzessive Anwendung von

$$J_- = j_- \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes j_-.$$

Die Form von $|22\rangle$ ist einfach zu finden; für $|11\rangle$ benutzen Sie den Ansatz

$$|11\rangle = a|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle + b|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle,$$

und bestimmen Sie a und b aus $J_+|11\rangle = 0$ und aus der Normierungbedingung. Es gilt allgemein

$$J_\pm|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}.$$

6. Nichtrelativistisches, ideales Fermi-Gas bei $T = 0$

Betrachten Sie ein ideales Fermi-Gas in einem Volumen V. Bei $T = 0$ werden alle Impuls-Zustände bis zu $p = p_f$ besetzt (Besetzungszahl $g = 2$, wegen des Spins). Aus der Normierungsbedingung

$$N = \int_V \int_{|\vec{p}| \leqslant p_f} \frac{d^3x\, d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\, g$$

bestimmen Sie eine Beziehung zwischen der Teilchendichte $n = N/V$ und p_f. Drücken Sie weiterhin für nichtrelativistische Fermionen ($E_p = \vec{p}^2/2m$) die Gesamtenergie U als Funktion von V und n aus (Relation von der Form $U = \text{const} \cdot V n^{5/3}$ ist zu erwarten). Nutzen Sie die Relation

$$PV = \frac{2}{3} U,$$

(die aus $\Omega = -PV$ im nicht-relativistischen Fall folgt) um die Zustandsgleichung (Beziehung zwischen dem Druck P und der Teilchendichte n) für nichtrelativistische, ideale Fermionen herzuleiten:

$$P = \frac{\hbar^2}{5m} \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} n^{5/3}. \tag{5}$$

7. Semiklassisches Model eines Atoms

Ein Atom sei modelliert als eine Wolke von freien Elektronen, die sich in einem äußeren Potential $V(r) = -(eZ)/r$ befinden. Betrachten Sie die Elektronen als eine Flüssigkeit mit der Zustandsgleichung (5). Das Dichtenprofil im Gleichgewicht $n(r)$ erfüllt die hydrostatische Euler-Gleichung[1]:

$$e n(r) \frac{dV}{dr} = -\frac{dP}{dr}.$$

Lösen Sie diese Gleichung für $n(r)$ und überzeugen Sie sich, dass $n(r)$ durch die Bedingung

$$\int d^3x\, n(r) = Z$$

normiert werden kann (obwohl wegen der Singularität von $V(r)$ bei $r = 0$ auch $n(r)$ bei $r = 0$ singulär wird). Skizzieren Sie den Radius des Atoms als Funktion von Z und schätzen Sie die typische Drücke (in Pa) ab.

[1] Der Druck, P und die Teilchendichte n sind jetzt Funktionen von r; sie erfüllen am jeden Punkt die Gleichung (5).

8. Verallgemeinerung: relativistische und zweidimensionale Fermi-Gasen

Das thermodynamische Potential Ω eines dreidimensionalen, idealen Gases (für beliebige T) ist gegeben durch

$$\Omega = -\frac{V\gamma}{\beta}\int_0^\infty p^2\,dp\,\ln\{1+\exp[-(E_p-\mu)\beta]\},$$

wo $\beta = (k_B T)^{-1}$, $\gamma = g/2\pi^2\hbar^3$ und E_p ist die zum Impuls p gehörige Energie. Zeigen Sie (durch partielle Integration), dass $\Omega = -\frac{2}{3}U$ für nichtrelativistische Fermionen ($E_p = p^2/2m$), und dass $\Omega = -\frac{1}{3}U$ für (ultra-)relativistische Fermionen ($E = cp$). Benutzen Sie die letzte Beziehung um die Zustandsgleichung eines relativistischen Fermi-Gases herzuleiten (für $T = 0$).

Bei der Beschreibung zweidimiensionaler Systeme (etwa in der Festkörperphysik) ersetzt man $V\,d^3p/h^3$ durch $S\,d^2p/h^2$, also z.B.

$$\Omega_2 = -\frac{S\gamma_2}{\beta}\int_0^\infty p\,dp\,\ln\{1+\exp[-(E_p-\mu)\beta\},$$

mit $\gamma_2 = g/2\pi\hbar^2$. Leiten Sie die entsprechende Relationen zwischen Ω_2 und U_2. Wie sehen die Zustandsgleichungen der zweidimensionalen Fermi-Gasen für $T = 0$?

9. Störung eines harmonischen Oszillators

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2, \qquad H' = \frac{1}{2}bx^2.$$

$|n\rangle$ seien die ungestörten Energieeigenzustände (EZ. des H_0). Berechnen Sie perturbativ die erste Korrektur der Wellenfunktion des niedrigsten Energieeigenzustands, $|\tilde{0}\rangle = |0\rangle + b\cdot\psi_1$. Ermitteln Sie auch die exakte Energieeigenfunktion des gestörten Hamiltonoperators, und verifizieren Sie, dass sie für kleine b (und kleine x) der perturbativen Funktion entspricht.

10. Elektrische Suszeptibilität

Berechnen Sie die elektrische Suszeptibilität eines sich in einem Kastenpotential $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ befindenden Quantenteilchen. Nehmen Sie an, dass das Teilchen sich im Grundzustand befindet, und dass der Hamiltonoperator gegeben ist durch

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}, \qquad H' = exE,$$

wobei E das konstante elektrische Feld bezeichnet. Skizzieren Sie die Grundzustandswellenfunktion.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Grundzustandswellenfunktion $|\tilde{0}\rangle$ perturbativ in ersten Ordnung der Störungstheorie. Danach ermitteln Sie den Erwartungswert des Dipoloperators $d = e\cdot x$ bezüglich $|\tilde{0}\rangle$ (falls nötig beschränken Sie sich auf führende Glieder).

11. Weiße Zwergen

Weiße Zwergen sind kompakte kalte Obiekte die durch die Gravitation gebunden sind und durch den Entartungsdruck stabilisiert sind. Sie bestehen aus einem zwei-komponentigen Gas von Elektronen und ionisierten Kernen. Die Bedingung der mechanischen Stabilität ist durch die Euler-Gleichung ausgedrückt:

$$\rho(r)\frac{dV}{dr} = -\frac{dP}{dr}, \tag{6}$$

wobei die Massendichte ρ wird durch die Teilchendichte von Elektronen $n(r)$ und die Masse per Elektron m (etwa m =Kernmasse/Anzahl der Elektronen) ausgedrückt:

$$\rho(r) = mn(r).$$

Das Gravitationspotential $V(r)$ ist jetzt nicht gegeben (von Anfag fixiert), sondern muss aus der Poisson-Gleichung bestimmt werden

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{dV}{dr} = 4\pi G\,\rho(r). \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass beide Gleichungen zu der Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{df}{dr} = -Af^\alpha$$

führen, wobei $f^\alpha = n$. Betrachten Sie nichtrelativistische

$$P = \frac{\hbar^2}{5m_e}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3} n^{5/3}$$

(m_e steht für die Elektronenmasse) und ultra-relativistische

$$P = \frac{\pi^2 c\hbar}{4}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{1/3} n^{4/3}$$

Elektronen. Bestimmen Sie A und α in beiden Fällen. Zeigen Sie ferner, dass durch die Substitution

$$f = \left(\frac{1}{AR^2}\right)^2 g_N(r/R)$$

im nichtrelativistischen Fall, und

$$f = \frac{1}{\sqrt{A}R}\, g_R(r/R)$$

im relativistischen Fall, mit beliebigen R, kann die Gleichung zu

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}x^2\frac{dg}{dx} = -Ag^\alpha$$

vereinfacht werden (hier $x = r/R$). Lieder ist diese Gleichung nicht explizit lösbar. Zeigen Sie, dass die Lösungen monoton fallend (im x) sind, und dass sobald die Lösung mit der Anfangsbedingung $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$ bekannt ist, können alle Funktionen mit Anfangsbedingungen $g(0) = C$, $g'(0) = 0$ erzeugt werden. Numerisch hat mad die folgende Lösungen gefunden:

$$g_N(0) = 178.2,$$

und

$$g_R(0) = 6.9,$$

jeweils mit der Bedingungen $g'(0) = 0$, $g(1) = 0$ (die Weiße Zwergen sind also kompakt).

Drücken Sie schließlich die Masse des Sterns als eine Funktion von R, m, m_e und von der numerischen Konstante $\int_0^1 x^2 dx g^\alpha(x)$. Zeigen Sie, dass im nichtrelativistischen Fall gibt es Konfigurationen zu jeder Masse M. Überraschenderweise ist aber im relativistischen Fall die Masse von der Radius unabhängig und somit ist die Gleichgewicht nur für eine Masse möglich (diese Masse ist als Chandrasekhar Masse bekannt).

12. Störung eines zwei-niveau Systems

Ein Quantensystem mit

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wird durch einen zusätzlichen Operator

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gestört. Berechnen Sie die Energie sowie den Grundzustandseigenvektor bis auf die Terme von der Ordnung λ^2 (einschließlich). Normieren Sie den Zustand, und bestimmen die Normierungsfunktion $Z(\lambda)$ (wieder bis zu λ^2). Verifizieren Sie die Hellmann-Feynman-Formel

$$\left\langle \frac{dH}{d\lambda} \right\rangle_{\tilde{\psi}(\lambda)} = \frac{dE}{d\lambda},$$

wobei $\tilde{\psi}(\lambda)$ die normierte Wellenfunktion, und E seine Energie bezeichnet.

13. Störung eines zwei-niveau Systems - Verallgemeinerung

Benutzen Sie die allgemeine Formel der Störungstheorie um den Grundzustandseigenvektor bis auf die Terme von der Ordnung λ^3 und die Energie bis zu λ^4 zu bestimmen. Weiterhin normieren Sie den Zustand, bestimmen Sie die Normierungsfunktion $Z(\lambda)$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den exakten Ausdrucken. Für exakten und störungstheoretische Eigenvektoren/Energien verifizieren Sie die Hellmann-Feynman-Formel.

14. Wechselwirkung von entfernten Elektronen in einer Dimension

Zwei Elektronen seien gebunden durch harmonische Potentiale jeweils um $x = 0$ und $x = R$ (wir setzen $m = k = \hbar = 1$). Der freie Hamiltonoperator sei gegeben durch

$$H_0 = a^* a + b^* b + 1$$

wobei a den zu dem ersten Teilchen und b den zu dem zweiten Teilchen gehörige Vernichtungsoperator bezeichnet. Es gilt

$$x_1 = \frac{a + a^*}{\sqrt{2}}, \qquad x_2 = R + y = R + \frac{b + b^*}{\sqrt{2}}.$$

Die Teilchen wechselwirken mit elektrostatischen Kräfte, die störungstheoretisch behandeln werden sollen (wir interessieren uns für den Fall $R \gg 1$):

$$H' = \frac{e^2}{x_2 - x_1} = \frac{e^2}{R + y - x_1}.$$

Berechnen Sie die erste Korrektur zur Energie des ungestörten Grundzustands und die daraus folgende Kraft.

Hinweis: Wie bei der Van der Waals Kräften, entwickeln Sie zunächst die Wechselwirkungspotential in eine Taylor-Reihe bzgl. x_1 und y, und schränken Sie sich zu den Glieder die nicht schneller als R^{-3} mit R abfallen.

15. Störung eines entarteten Zwei-Niveau-Systems

Ein Quantensystem mit

$$H_0 = E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wird durch einen zusätzlichen Operator

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gestört, d.h. $H = H_0 + \lambda H'$. Finden Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Energien der gestörten Zustände (und die diesen entsprechenden ungestörten Zustände).

16. Quantensysteme mit Entartung

Ein Quantensystem mit

$$H_0 = E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

wird durch

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gestört. Finden Sie die gestörten Energien (alle drei) bis zur zweiten Ordnung in λ und die zugehörigen Zustände bis zur ersten Ordnung in λ.

17. Teilchen auf einem Kreis im homogenen elektrischen Feld

Ein Quantenteilchen der Masse m bewegt sich auf einem Kreis vom Radius R. Der Hamiltonoperator ist durch den Drehimpulsoperator $L = -i\frac{d}{d\varphi}$ ausdrückbar

$$H_0 = \frac{1}{2mR^2} L^2$$

Finden Sie die normierten Eigenzustände von H_0 und deren Energien. (Die Wellenfunktion mit ihrer Ableitung soll periodisch bei $\varphi = 0 = 2\pi$ sein.) Nun wird das System durch ein homogenes elektrisches Feld gestört, $V = -eR\mathcal{E}\cos\varphi$. Berechnen Sie die Korrekturen zweiter Ordnung (in $e\mathcal{E}$) zu den Energien der ersten angeregten ungestörten Zustände.

Hinweis: die Entartung wird erst in der zweiten Ordnung aufgehoben. Die erste nicht-triviale Gleichung tritt also erst bei $(e\mathcal{E})^2$ *auf; diese Gleichung soll als Eigenwertproblem verstanden werden und die Eigenwerte sind die Korrekturen zweiter Ordnung zur Energie, während die Eigenvektoren die Funktionen nullter Ordnung* (ψ^0) *sind.*

18. Quantenteilchen in homogenen Magnetfelder - Teil 1

Ein Quantenteilchen befindet sich auf einer Ebene (2D) in einem zu der Ebene senkrechten, homogenen Magnetfeld B. Setzen Sie in

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(-i\hbar\partial_x - \frac{e}{c}A_x\right)^2 + \left(-i\hbar\partial_y - \frac{e}{c}A_y\right)^2\right]$$

$\vec{A} = (0, B\cdot x, 0)$, und verwenden Sie den Ansatz

$$\psi = e^{ipy/\hbar}\cdot f(x)$$

um die Energieeigenzustände und deren Energien zu bestimmen.

Hinweis: das Problem bzgl. x *lässt sich zu einem harmonischen Oszillator umformen.*

19. Quantenteilchen in homogenen Magnetfelder - Teil 2

In einer anderen Eichung ist das Problem eines Teilchen im homogenen Magnetfeld symmetrischer:

$$\vec{A} = \tfrac{H}{2}(-y, x, 0)$$

Gehen Sie über zu dimensionslosen Koordinaten (x, y), und führen Sie die Variable $z = x + iy$ ein und

$$\partial = \frac{1}{2}\partial_x + \frac{1}{2i}\partial_y$$
$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\partial_x - \frac{1}{2i}\partial_y.$$

Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$a = -\overline{\partial} - z/2 \qquad b = \partial + \overline{z}/2$$
$$a^* = \partial - \overline{z}/2 \qquad b^* = -\overline{\partial} + z/2.$$

$[a, a^*] = 1$, $[b, b^*] = 1$, $[a, b] = 0 = [a, b^*]$ erfüllen. (Man darf annehmen, dass $\partial(\overline{z}) = 0$ und dass $\overline{\partial}\partial = \partial\overline{\partial}$, d.h. man soll z und $\overline{z}$ als unabhängige Koordinaten betrachten.) Darüber hinaus zeigen Sie dass:

$$K = -i\hbar\partial_\varphi = z\partial - \overline{z}\overline{\partial} = \hbar(b^*b - a^*a),$$
$$H = \hbar\omega_c(a^*a + \tfrac{1}{2})$$

Jetzt kann das Problem algebraisch gelöst werden. Bestimmen Sie die Lösungen (Wellenfunktionen) und charakterisieren Sie deren Entartung (mit Hilfe der Eigenwerte von K).

Wichtig! *In beiden Teilen lösen Sie zusätzlich das ensprechende klassische Problem (d.h. für klassische Teilchen). Die Quantenzustände sind hoch-entartet. Charakterisieren Sie die Entartung der Grundzustände. Überlegen Sie sich in welchem Raumgebiet die Wellenfunktionen wesentlich lokalisiert sind, und berechnen Sie die Erwartungswerte der quantenmechanischen elektrischen Ströme*

$$j^i_\psi = \frac{1}{2m}\left[\overline{\psi}\Pi^i\psi + \overline{\Pi^i\psi}\psi\right],$$

mit

$$\Pi^i = \left(-i\hbar\partial^i - \frac{e}{c}A^i\right).$$

20. Quantenteilchen mit Spin und Drehimpuls

Die Zustände eines Quantenteilchens mit Spin lassen sich ausdrücken in der Tensor-Produkt-Basis:

$$|\psi\rangle = \sum_{m,s} c_{m,s}|l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle$$

wobei $|lm_l\rangle$ die Eigenfunktionen von L^2 und L_z (jeweils zu den Eigenwerten $l(l+1)$ und m_l), und gleichzeitig Eigenfunktionen von S^2 und S_z (zu den Eigenwerten $3/4$ und m_s) sind. Drücken Sie die Eigenzustande des Gesamtdrehimpulses $|JM\rangle$ (d.h. Eigenwektoren von $J^2 = (L+S)^2$ und von $J_z = L_z + S_z$ zu den Eigenwerten $J(J+1)$ und M) als Überlagerung von Tensorproduktzustände aus. Betrachten Sie die Fälle: $J = l + 1/2$ und $J = l - 1/2$. Berechnen Sie die ensprechenden Überlagerungen explizit für den Speziallfall $l = 1$.

Hinweis: Die Aufgabe ist analog zu der Aufgabe 2 aus dem Übungsblatt 1.

Zusatzübung: Überzeugen Sie sich, dass $|jm\rangle$ Eigenvektoren von $L \cdot S$ sind.

21. Spin-Bahn Kopplung und Wechselwirkung mit einem Magnetfeld für $l = 1$

Ein Quantenteilchen mit Spin befindet sich in einem Magnetfeld. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$H = H_{LS} + H_M = 2\alpha L \cdot S + \beta(L_z + 2S_z),$$

wobei α, β Konstanten sind und β proportional zur Magnetfeldstärke ist. Berechnen Sie die Matrix-Elemente des Hamiltonoperators H entweder in der Tensor-Produkt-Basis oder in der Gesamtdrehimpuls-Basis $|JM\rangle$. Bestimmen Sie das Spektrum dieses Operators (d.h. die Eigenwerte der Matrix des H). Für den Fall $\beta = 0$ und $\beta \to \infty$ (d.h. entweder kein oder ein sehr starkes Magnetfeld) charakterisieren Sie die Entartung der Eigenwerte von H und bestimmen Sie die ensprechenden Eigenvektoren. Für $\beta \ll 1$ berechnen Sie störungstheoretisch die Korrekturen zu den Energien der Eigenzustände von H_{LS}; vergleichen Sie diese mit den exakten Ergebnissen für das Spektrum von H. Skizzieren Sie das Spektrum von H als Funktion von β.

22. Einfache Variationsprobleme

Bestimmen Sie mit Hilfe der Variationsmethode obere Schranken für die Grundzustandsenergien des Quantenteilchen,

$$H\psi = -\frac{\hbar^2\psi''}{2m} + V(x)\psi,$$

in folgenden Potentiale:

$$V_1 = \frac{m\omega^2}{2}x^2,$$
$$V_2 = -g\delta(x).$$

Verwenden Sie in beiden Fällen die Versuchsfunktionen

$$\psi_a(x) = Ne^{-ax^2/2},$$
$$\chi_a(x) = \frac{N}{a^2 + x^2}.$$

Normieren Sie diese Funktionen, berechnen Sie die Erwartungswerte von H, bestimmen Sie die besten "a" und die Schranke für die Energien. Für jedes Potential skizzieren Sie die optimalen Versuchsfunktionen und die exakten Grundzustands-Wellenfunktionen.

23. Neutron im Gravitationsfeld

Ein Neutron befindet sich im homogenen Gravitationsfeld über einer ideal elastisch reflektierenden Ebebe, d.h. $V = mgz$ mit der Randbedingung $\psi(z)|_{z=0} = 0$. Führen Sie eine dimensionslose Koordinate x ein, so dass die Schrödingergleichung zu

$$E\psi = -\psi'' + x\psi$$

vereinfacht wird. Verwenden Sie die Versuchsfunktion

$$\psi_a = Nxe^{-ax}$$

um die Grundzustandsenergie abzuschätzen. (Eine bessere Abschätzung erhält man für die Versuchsfunktion $Nxe^{-ax^{3/2}}$.) Skizzieren Sie die Versuchsfunktion für den optimalen Wert von "a". Diskutieren Sie die Ergebnisse (z.B. wie hoch gleitet das Neutron über den Spiegel). Lösen Sie das Problem exakt! *(Hinweis: Die Airy-Funktion hat seine erste Nullstelle bei $x = -2.3381$.)*

Bemerkung: Die in der Aufgabe betrachtete Situation wurde in einem Experiment untersucht, siehe: `http://arxiv.org/abs/hep-ph/0306198`

24. Anregungen mit Licht-pulsen - Störungstheoretisch

Ein Zwei-Niveau-System werde mit einem elektromagnetischen Wellenpaket bestrahlt:

$$H = \frac{E}{2}\sigma_3 + f(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \exp(-iEt) \\ \exp(iEt) & 0 \end{pmatrix}$$

wobei

$$f(t) = \frac{\alpha\beta}{1 + \beta^2 t^2}.$$

Nehmen Sie an, dass das System sich bei $t \to -\infty$ im Grundzustand befand, und berechnen Sie im ersten Ordnung der (zeitabhängigen) Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, das System bei $t \to \infty$ im angeregten Zustand zu finden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung (siehe QM1-Aufgaben 32,34).

25. Zeitunabhängige Störungen und Phasen in der Störungstheorie

Betrachten Sie ein System mit

$$H_0 = \frac{E}{2}\sigma_3, \qquad V = \lambda\sigma_1.$$

Bei $t = 0$ befindet sich das System im Grundzustand (von H_0). Berechnen Sie störungstheoretisch und exakt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System bei $t = T$ im angeregten Zustand zu finden. *(Hinweis:* $\exp(i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\omega t) = \cos(\omega t) + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sin(\omega t)$.*)* Zeigen Sie, das die störungstheoretische Wahrscheinlichkeit zwar oszilliert, aber immer mit der falschen Frequenz. Zeigen Sie ferner, dass die beiden Ergebnisse für kleine T übereinstimmen. Welche T sind klein?

26. Absorption der elektromagnetischen Strahlung

Ein "S-Zustand" wird mit einer monochromatischen elektromagnetischen Welle bestrahlt,

$$V = -z\,eE_0\cos(\omega t).$$

Benutzen Sie die zeitabhängige Störungstheorie, um zu beantworten, zu welchen "P-Zuständen" wird es Übergänge geben. Hier sind

$$\psi_S = R_1(r),$$
$$\psi_{P,m} = R_2(r)\cdot Y^1_m(\theta,\varphi),$$

mit beliebige Funktionen $R_1(r), R_2(r)$.

27. Anregungen eines harmonischen Oszillators mit EM-Strahlung

Ein dreidimensionaler harmonischer Oszillator wird mit einer EM-Welle bestrahlt

$$H_0 = \omega_0(a_x^* a_x + a_y^* a_y + a_z^* a_z + 3/2),$$

mit

$$V = -e(\vec{E}_0\vec{x})\cos(\omega t + \vec{k}\vec{x}),$$

im allgemeinen Fall. Nun sei die Welle in z-Richtung (linear) polarisiert, mit der Wellenvektor in x-Richtung,

$$V = -eE_0\,z\cos(\omega t + kx).$$

Zwischen welchen Niveaus wird es Dipol-Übergaenge geben? In der Dipol-Näherung wird

$$V = -eE_0\,z\cos(\omega t).$$

Welche "verbotenen" Übergaenge sind möglich wenn man die erste Korrektur zur Taylor-Entwicklung des Potentials berücksichtigt:

$$V = -eE_0\,z\cos(\omega t) + e(E_0\,z)\cdot(kx)\,\sin(\omega t).$$

Berechnen Sie die ensprechenden Übergangsraten (Fermis-Goldene-Regel).

28. Verbotene Übergänge beim Wasserstoffatom

Ein Wasserstoffatom wird mit einer EM-Welle bestrahlt. Finden Sie die Auswahlregeln für "verbotene" Übergänge (s. Aufgabe 27); betrachten Sie nur die Zustände mit $n = 1, n = 2, n = 3$; welche Übergänge die bei der Dipol-Näherung nicht möglich waren sind jetzt erlaubt? Schätzen sie Die Übergangsraten für verbotene $3D-2S$ Übergänge im vergleich zu den $3D-2P$ Dipol-Übergänge.

29. Negative Wasserstoff-Ionen

Betrachten Sie ein negatives Wasserstoff-Ion das aus zwei von einem Proton gebunden Elektronen besteht. Zeigen Sie, dass es einen stabilen Grundzustand gibt ($E_g < E_0 + 0$); verwenden Sie die Versuchsfunktion[2]

$$\Psi(\vec{x}, \vec{y}) = N[\psi_1(\vec{x})\psi_2(\vec{y}) + \psi_2(\vec{x})\psi_1(\vec{y})]$$

mit

$$\psi_1(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} e^{-\alpha|\vec{x}|},$$
$$\psi_2(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\beta^3}{\pi}} e^{-\beta|\vec{x}|}.$$

Hinweise:

- Führen Sie zuerst dimensionslosen Koordinaten, sodass
$$H = \frac{1}{2}(-\nabla_x^2 - \nabla_y^2) - \frac{\gamma}{|\vec{x}|} - \frac{\gamma}{|\vec{y}|} + \frac{\gamma}{|\vec{x} - \vec{y}|},$$
wobei $\gamma = e^2/\hbar c = 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet;
- Überzeugen Sie sich, dass die Variationsmethode für einen einzelnen Elektron die exakte Grundzustandsenergie liefert $E_0 = -\gamma^2/2$;
- Zeigen Sie dass
$$\int d^3x d^3y\, e^{-a|x|} e^{-b|y|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 2(4\pi)^2 \frac{a^2 + 3ab + b^2}{a^2 b^2 (a+b)^3}.$$
(führen Sie die Kugelkoordinaten für $\vec{x}$ und $\vec{y}$.)
- Normieren Sie die Funktion $\Psi(\vec{x}, \vec{y})$.
- Verwenden Sie alle Ihnen verfügbare Methoden um das Minimum der Erwartungswert $\langle H \rangle_\Psi$ zu finden, und zu zeigen, dass es kleiner als E_0 ist.
- Existiert auch ein solches Minimum für die antisymmetrische Wellenfunktion
$$\Psi_a(\vec{x}, \vec{y}) = N[\psi_1(\vec{x})\psi_2(\vec{y}) - \psi_2(\vec{x})\psi_1(\vec{y})]\,?$$

30. Freie Wellen in 3D

Die Schrödinger-Gleichung im freien Raum (keine Potentiale) besitzt die Lösungen

$$\psi = R_l(r) \cdot Y_m^l(\theta, \varphi)$$

[2] Der antisymmetrische Spin-Anteil der Zustands-Wellenfunktion wird hier unwichtig.

wobei die Funktionen $R_l(r)$ die radiale Gleichung

$$-\frac{d^2R_l}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{dR_l}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}R_l = k^2R_l$$

erfüllen (hier ist $k^2 = 2mE/\hbar^2$). Führen Sie die Variable $x = kr$, und überzeugen Sie sich, dass wenn $R_l(x)$ die radiale Gleichung löst, löst auch

$$R_{l+1}(x) = -x^l\frac{d}{dx}\left(\frac{R_l}{x^l}\right)$$

die radiale Gleichung mit $l \to l+1$. Auf diese Weise können alle freie Wellen gefunden werden. Vom speziellen Interesse sind die Lösungen, die aus folgenden R_0 erzeugt werden können:

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

führt auf die sog. spherische Bessel Funktionen $j_l(x)$. Diese Funktionen sind reell und überall regulär;

$$n_0(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

führt auf linear von j_l unabhängigen Funktionen die im Gegenteil zu j_l singulär im Ursprung sind;

$$h_0 = -i\frac{e^{ix}}{x}$$

führt auf komplexe Funktionen die als auslaufende Wellen aufgefasst werden sollen. Diese Funktionen sind als Henkel Funktionen bekannt[3]. Verifizieren Sie, dass j_0, n_0 und h_0 die radiale Gleichung erfüllen. Bestimmen Sie explizit j_l, n_l und h_l für $l = 1, 2$.

31. Zerlegung einer ebenen Welle

In der Vorlesung wurde eine ebene Welle $\psi = \exp[i\vec{k}\vec{x}] = \exp[ikr\cos(\theta)]$ in eine Summe

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot j_l(x) \cdot Y_0^l(\theta)$$

zerlegt. Finden Sie explizit die drei ersten Koeffizienten: c_0, c_1, c_2 in dem Sie die Skalarprodukte von ψ und Y_0^l (über einer Sphere) berechnen. Verifizieren Sie, dass nur die reguläre spherische Bessel Funktionen, die $j_l(x)$, auftreten (d.h. die Skalarprodukte ergeben automatisch nur die $j_l(x)$, für jedes l, mit keinem Beitrag von $n_l(x)$).

32. Streuung von Elektronen an einer Neumann-Sphere

Elektronen, wie eine Flussigkeit, werden auf einer Sphere gestreut auf diese Weise, dass die radiale Komponente des Wahrscheinlichkeitsströms auf der Sphere verschwindet:

$$\partial_r\Psi|_{r=1} = 0.$$

[3]Man beachte, dass die hier auftretende Funktionen keine spezielle Funktionen sind, in dem Sinne, dass sie alle durch elementare Funktionen ausdrückbar sind.

Nehmen Sie an, dass die einlufende Teilchen durch die Wellenfunktion

$$\psi = \exp[-i\vec{k}\vec{x}] = \exp[-ikr\cos(\theta)]$$

beschrieben sind, und finden Sie den auslaufenden Anteil:

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot h_l(x) \cdot Y_0^l(\theta)$$

so dass die Randbedingung für die komplette Wellenfunktion

$$\Psi = \exp[-ikr\cos(\theta)] + \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot h_l(x) \cdot Y_0^l(\theta)$$

bei $r = 1$ erfüllt ist! (Schränken Sie sich, falls nötig, auf $l = 0, 1, 2$.)