
Übungen zur Theoretischen Mechanik Ergänzungsblatt zur Hamilton-Jakobi-Theorie und Wirkung-Winkel-Koordinaten

Es ist empfohlen in den folgenden Aufgaben die Methode der Wirkung-Winkel-Koordinaten zu verwenden. Sie basiert auf der Hamilton-Jakobi Methode, und ist z.B. in der englischen Wikipedia ("Action-angle coordinates") oder (vollständiger) im Buch von Goldstein dargestellt. Diese Methode ermöglicht quantitative Aussagen über periodischen Systemen zu gewinnen, selbst wenn die Bewegungsgleichungen nicht explizit lösbar sind. Gleichzeitig bietet sie eine Verbindung: einerseits zu den Methoden der komplexen Analysis, und andererseits zur Quantenmechanik (Sommerfeldsche Quantisierung).

Aufgabe I

Ein freies Teilchen bewegt sich auf der Oberfläche einer Kugel. Zeigen Sie, dass die Perioden der θ -Bewegung und der φ -Bewegung gleich sind.

Aufgabe II

Ein geladenes Teilchen (mit der Ladung q) bewegt sich in der x - y Ebene in einem zu der Ebene senkrechten Magnetfeld $B_z = BR/r$. Wir wissen aus der Aufgabe 3 (Übungsblatt 2), dass es einen Bereich der Parameter (E, J) gibt für die die Bahnkurve eine verängerte Zykloide beschreibt. Diese Bewegung ist doppel-periodisch (im r und im φ). Bestimmen Sie beide Perioden¹ (als Funktionen der Wirkung-Winkel Konstanten J_r und J_φ , die selbst Funktionen der Energie E und des Drehimpulses J sind).

Bearbeitung der Aufgaben ist freiwillig.

¹Es ist empfohlen die auftretenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes zu berechnen.