Prof. Dr. R. Verch
PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 14

Aufgabe 43
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\mathcal{G}(t,s) = \theta(t-s)\frac{1}{\Omega}\mathrm{e}^{-\varrho(t-s)}\sin(\Omega(t-s))\,, \quad t,s\in\mathbb{R}\,,$$

wobei $\Omega = \omega_0^2 - \varrho^2$, und mit $\theta(x) = 1$ für $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ für $x < 0$, eine Greensche Funktion für die inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\varrho\frac{d}{dt}y(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t)$$

darstellt (für f unendlich oft differenzierbar, und so, dass $f(t) = 0$ für t außerhalb eines endlichen Intervalls). Berechnen Sie dann mit Hilfe von $\mathcal{G}(t,s)$ die Lösung $y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}(t,s)f(s)\,ds$ für die Funktion

$$f(t) = F_0\mathrm{e}^{-\alpha t} \ \text{ für } t \geq 0\,, \quad f(t) = 0 \ \text{ für } t < 0$$

mit Konstanten $F_0, \alpha > 0$. Untersuchen Sie die Grenzfälle $\alpha \to 0$ und $\alpha \to \varrho$.
Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty}\theta(t-s)h(t,s)\,ds = \int_{-\infty}^{t}h(t,s)\,ds$.

Aufgabe 44
Eine Punktmasse m, die sich in der x-y-Ebene bewegen kann, sei an drei (idealisiert masselosen) Federn befestigt. Jede der Federn hat die Federkonstante D und die entspannte Länge $\sqrt{2}$ in geeigneten Einheiten. Mit ihrem anderen Ende sind die Federn jeweils an den Punkten $(-1,1)$, $(1,1)$ und $(-1,-1)$ der x-y-Ebene befestigt.

(a) Bestimmen Sie die potentielle Energie des Systems und die stabile Gleichgewichtslage. Geben Sie die um die Gleichgewichtslage linearisierten Bewegungsgleichungen an.

(b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen für kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage.

(c) Geben Sie die zu den Eigenfrequenzen zugehörigen Eigenvektoren an. Interpretieren Sie die entsprechenden Normalmoden anschaulich.

Aufgabe 45

Betrachten Sie eine unendlich ausgedehnte, lineare Kette von Teilchen gleicher Masse m, die sich längs einer Geraden bewegen können und die jeweils durch gleichartige Federn verbunden sind. Das System befindet sich in einer stabilen Gleichgewichtslage wenn alle Teilchen denselben Abstand a voneinander haben. Die Gleichgewichtsposition des n-ten Teilchens sei $y_n^0 = n \cdot a$ ($n \in \mathbb{Z}$), die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage zur Zeit t sei $x_n(t) = y_n(t) - y_n^0$.

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichung für die unendliche lineare Kette an.

(b) Zeigen Sie, dass durch $x_n(t) = Q_k(t) \mathrm{e}^{ikna}$ eine Normalkoordinate Q_k definiert wird ($k \in \mathbb{R}$), d.h. dass die Bewegungsgleichung durch dieses $x_n(t)$ mit $Q_k(t) = A_k \mathrm{e}^{i\omega_k t}$ gelöst wird.

(c) Die Wellenzahl k der Lösung kann zunächst beliebige Werte annehmen. Begründen Sie, dass man k auf den Bereich $-\pi/a \leq k \leq \pi/a$ einschränken kann. Skizzieren Sie dann die Eigenfrequenzen $\omega_k = \omega(k)$ als Funktion von k (Dispersionsrelation).

(d) Eine endliche Kette aus N Teilchen kann durch die periodische Randbedingung $x_n(t) = x_{n+N}(t)$ modeliert werden. Zu welchen diskreten Werten von k führt diese Randbedingung?

[Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte]

Abgabe: Am Mittwoch, den 30.1.2008 in der Vorlesung.