Prof. Dr. R. Verch
PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 13

Aufgabe 40

Ein Teilchen mit elektrischer Ladung e und Masse m bewege sich in einem zeitabhängigen elektrodynamischen Potential (ϕ, A_1, A_2, A_3). Die Lagrangefunktion des Teilchens ist gegeben durch

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{m}{2}|\dot{q}|^2 - e\phi(t, q) + \frac{e}{c}\sum_{k=1}^{3} \dot{q}_k A_k(t, q)$$

mit $q \in \mathbb{R}^3$, $\dot{q} \in \mathbb{R}^3$, $|\dot{q}|$ = euklidische Norm von $\dot{q}$. c ist eine positive Konstante, und die Funktionen ϕ und A_k sind C^∞, definiert auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ mit Werten in $\mathbb{R}$. Das elektrische Feld E und das Magnetfeld B werden aus (ϕ, A_1, A_2, A_3) erhalten durch

$$E = -\nabla_q \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A\,, \quad B = \nabla_q \times A\,,$$

mit $A = (A_1, A_2, A_3)^T$.

(a) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion H für die Bewegung des Teilchens.

(b) Bestimmen Sie aus der Hamiltonfunktion die Bewegungsgleichung des Teilchens.

(c) Vergleichen Sie die Bewegungsgleichung aus (b) mit der Lorentzkraft-Gleichung

$$F = eE + \frac{e}{c}\dot{q} \times B\,.$$

(d) Prüfen Sie, ob das System integrabel ist, wenn ϕ und die A_k Konstanten sind. Ist dies die allgemeinste Bedingung für Integrabilität des Systems? Ist das System integrabel, wenn man nur fordert, dass das elektrodynamische Potential zeitunabhängig ist?

[6 Punkte]

Aufgabe 41
Es wird ein harmonischer Oszillator in einer Dimension betrachtet, der einer schwachen Dämpfung durch eine Reibungskraft $F_R(\dot{x}) = -\gamma\dot{x}$ unterliegt, wobei x die Auslenkung des Oszillators aus der Ruhelage bezeichnet und $\gamma > 0$ eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass das Volumen eines Phasenraumgebietes unter den Phasenraumabbildungen Ψ_t exponentiell für $t \to \infty$ gegen Null geht, unter der Annahme, dass die Phasenraumabbildungen $\Psi_t : (q_0, p_0) \mapsto (q(t), p(t))$ sich in der Weise darstellen, dass jeder Lösung $x(t)$ der Bewegungsgleichung die Phasenraumkurve $q(t) = x(t)$, $p(t) = \dot{x}(t) + \gamma x(t)$ zugeordnet wird.

[4 Punkte]

Aufgabe 42
In sphärischen Kugelkoordinaten $(r, \theta, \phi) = (q_1, q_2, q_3)$ hat die Hamiltonfunktion eines Teilchens der Masse m, das sich in einem nur von r und θ abhängigen Potential $U(r, \theta)$ bewegt, die Form

$$H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2(\theta)}\right) + U(r, \theta)\,.$$

Dabei sind p_r, p_θ, p_ϕ die zu r, θ, ϕ kanonisch konjugierten Impulse.

Im folgenden sei angenommen, dass $U(r, \theta) = a(r) + b(\theta)/r^2$ mit gegebenen C^∞ Funktionen a und b gilt. Gesucht ist die generierende Funktion $S_2(q, P)$, die zu gegebenem $P = (P_1, P_2, P_3)$ als Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H(r, \theta, \phi, \frac{\partial}{\partial r}S_2(r, \theta, \phi, P), \frac{\partial}{\partial \theta}S_2(r, \theta, \phi, P), \frac{\partial}{\partial \phi}S_2(r, \theta, \phi, P)) = P_3$$

erhalten wird.

(a) Bestimmen Sie die partielle Differentialgleichung, die sich aus der Hamilton-Jacobi-Gleichung für S_2 ergibt.

(b) Machen Sie den Ansatz $S_2(r, \theta, \phi, P) = h_1(r) + h_2(\theta) + h_3(\phi)$, wobei die h_i auch noch von dem Parameter P abhängen. Bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die sich für die h_i ergeben. Dabei sollen (i) der Parameter P_1 als unbestimmte Konstante in der Differentialgleichung für h_3, (ii) der Parameter P_2 als unbestimmte Konstante in den Differentialgleichungen für h_1 und h_2 auftreten.

(c) Integrieren Sie die Differentialgleichungen für die h_i und bestimmen Sie daraus eine Lösung S_2 der Hamilton-Jacobi-Gleichung.

[5 Punkte]

Abgabe: Am Mittwoch, den 23.1.2008 in der Vorlesung.