Prof. Dr. R. Verch
PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 37

Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f$ der Phasenraum eines dynamischen Systems und $(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f)$ seien die kanonischen Koordinaten, bezgl. derer die Poisson-Klammer $\{g, h\}$ von dynamischen Größen g und h definiert ist.

Es seien $\underline{q}_k(q,p) = q_k$, $\underline{p}_k(q,p) = p_k$ für $k = 1, \ldots, f$, $(q,p) \in \mathcal{P}$.

(a) Berechnen Sie die Poisson-Klammern

$$\{\underline{q}_j, \underline{p}_k\}\,, \quad \{\underline{q}_k, \underline{q}_j\}\,, \quad \{\underline{p}_k, \underline{p}_j\} \quad (k, j = 1, \ldots, f)\,.$$

(b) Verifizieren Sie die Jacobi-Identität

$$\{g, \{h, \ell\}\} + \{h, \{\ell, g\}\} + \{\ell, \{g, h\}\} = 0$$

für beliebige dynamische Größen g, h, ℓ.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\{gh, \ell\} = g\{h, \ell\} + h\{g, \ell\}$$

für beliebige dynamische Größen g, h, ℓ gilt.

(d) Wenn der Phasenraum der eines sich kräftefrei im Raum bewegenden Teilchens ist, so ist die Observable des Drehimpuls (bzgl. $q = 0$) definiert als der Satz von dynamischen Größen ℓ_1, ℓ_3, ℓ_3, wobei

$$\ell_1(q,p) = q_2 p_3 - q_3 p_2\,, \quad \ell_2(q,p) = q_3 p_1 - q_1 p_3\,, \quad \ell_3(q,p) = q_1 p_2 - q_2 p_2\,.$$

Berechnen Sie die Poisson-Klammern

$$\{\ell_j, \underline{p}_k\} \quad \text{und} \quad \{\ell_j, \underline{q}_k\}$$

und prüfen Sie, welche davon Erhaltungsgrößen sind.

Aufgabe 38
Im folgenden wird eine Transformation $\Psi_t : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $(t \in \mathbb{R})$ geschrieben als

$$\Psi_t(\binom{q}{p}) = \binom{Q(q,p,t)}{P(q,p,t)},$$

wobei die Funktionen Q und P Werte im $\mathbb{R}^f$ annehmen.

Prüfen Sie, ob die folgenden Transformationen der kanonischen Variablen $(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, qp_f)$ kanonisch sind.

(a) $f = 1,\ \ Q(q,p) = pq + q^3,\ \ P(q,p) = p^2 + p/q.$

(b) $f = 2$, $\mu, k, \omega > 0$ sind konstante Parameter,

$$\begin{aligned} Q_1(q_1, q_2, p_1, p_2, t) &= -\sqrt{\frac{2p_1}{k}} \sin(\mu(q_1 + t)) \\ Q_2(q_1, q_2, p_1, p_2, t) &= \cos(\omega t) q_2 + \sin(\omega t) p_2 \\ P_1(q_1, q_2, p_1, p_2, t) &= \frac{1}{\mu}\sqrt{2kp_1} \cos(\mu(q_1 + t)) \\ P_2(q_1, q_2, p_1, p_2, t) &= \sin(\omega t) q_2 - \cos(\omega t) p_2 \end{aligned}$$

(c) $f = 1$, $\kappa, \lambda > 0$ sind konstante Parameter,

$$Q(q,p,t) = -\frac{1}{\kappa}\arctan(\lambda q/p) - t\,, \quad P(q,p,t) = \frac{\kappa}{2\lambda}(p^2 + \lambda^2 q^2)\,.$$

Hinweis: $(\sin x)^2 = (\tan x)^2/(1 + (\tan x)^2)$.

Aufgabe 39
Die Hamiltonfunktion eines Teilchens der Masse m im eindimensionalen harmonischen Oszillatorpotential ($\mathcal{P} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f = 1$) ist gegeben durch

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

mit einer Konstanten $\omega > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und geben Sie deren allgemeine Lösung an. Wieviele Integrationskonstanten sind für eine konkrete Lösung festzulegen?

(b) Es sei (q_0, p_0) ein Punkt im Phasenraum und $t \mapsto (q(t), p(t))$ sei eine Integralkurve des Hamiltonschen Vektorfeldes mit $(q(0), p(0)) = (q_0, p_0)$. Zeigen Sie, dass die Integralkurve (auch genannt Phasenraumkurve) eine Ellipse ist. Berechnen Sie deren Mittelpunkt sowie Größe und Richtung der Halbachsen. Skizzieren Sie die Umlaufrichtung. (Hinweis: Es ist ratsam, zunächst die Kurve $(\xi(t), \eta(t)) = (\sqrt{m\omega}q(t), p(t)/\sqrt{m\omega})$ anstelle von $(q(t), p(t))$ zu betrachten.)

(c) Betrachten Sie für $t = 0$ das rechteckige Phasenraumgebiet $|q| \leq 1$, $-1 \leq p/m\omega \leq 2$. In welche Phasenraumgebiete wird dieses unter dem Fluss des Hamiltonschen Vektorfelds zu den Zeiten $t = \pi/4\omega$, $t = \pi/3\omega$ transformiert (Skizze)? Berechnen Sie die Größe der transformierten Gebiete.

Sonderübung: Fragen zum Inhalt der Vorlesung

Fragen ähnlichen Formats (aber nicht notwendig gleichen Inhalts) werden in der Klausur gestellt werden. Die hier gestellten Fragen dienen zur Vorbereitung auf diesen besonderen Aufgabentyp. Für die Bearbeitung der Aufgaben erhalten Sie hier – abweichend von der Situation bei der Klausur! – keine Punkte.

Hinweis: Wenn Sie in Ihren Antworten Formeln verwenden, dann wird erwartet, dass Sie auch die Bedeutung der Symbole angeben.

Beantworten Sie möglichst knapp und prägnant (in der Regel mit jeweils nicht mehr als 3 Sätzen, unter Angabe relevanter Formeln falls gefordert, sinnvoll oder hilfreich; auch Skizzen können benutzt werden) die folgenden Fragen:

1.) Erläutern Sie den Begriff einer Zeitfunktion. Was versteht man unter dem Begriff der absoluten Gleichzeitigkeit?

2.) Was versteht man unter dem Begriff der Determiniertheit im Zusammenhang mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen?

3.) Welche Größen sind bei der Relativbewegung zweier Teilchen, die über eine konservative Zentralkraft wechselwirken, zeitlich erhalten?

4.) Erläutern Sie den Begriff der Periheldrehung.

5.) Ein Teilchen bewege sich in einem Zentralpotential. Wie ist das effektive Potential definiert?

6.) Geben Sie die Definition des differentiellen Wirkungsquerschnitts an.

7.) Ein Massenpunkt, der in einem Inertialsystem ruht, erfährt bezüglich eines linear gegen das Inertialsystem beschleunigten Bezugsystems eine Scheinkraft. Was ist damit gemeint?

8.) Fertigen Sie eine Skizze an, bei der ein Massenpunkt auf der nördlichen Hemisphäre der Erde gezeigt ist. Zeichnen Sie schematisch ein, in welche Richtung die durch die Erddrehung verursachte Zentrifugalkraft zeigt.

9.) Was versteht man unter holonomen bzw. anholonomen Zwangsbedingungen? Geben Sie ein Beispiel für ein physikalisches System, das holonom-rheonomen Zwangsbedingungen unterliegt.

10.) Ein System unterliege holonomen Zwangsbedingungen. Was versteht man unter verallgemeinerten Koordinaten des Systems, und was unter der Mannigfaltigkeit (oder Fläche) der Zwangsbedingungen $\mathcal{F}_t$?

11.) Was bedeutet es, dass eine Kurve im Konfigurationsraum ein extremer Punkt des Wirkungsfunktionals ist?

12.) Ein mechanisches System sei durch einen Konfigurationsraum und eine Lagrangefunktion beschrieben. Wie sind die kanonisch konjugierten Impulse definiert? Wie ist die Hamiltonfunktion definiert?

Abgabe: Am Mittwoch, den 16.1.2008 in der Vorlesung.