Prof. Dr. R. Verch
PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 32
Ein homogenes (idealisiert unendlich dünnes) Seil der Masse m und Länge ℓ rutscht reibungsfrei über die Kante eines Tisches ab. Die Bewegung Seils erfolgt dabei senkrecht zur Tischkante.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf: (i) indem Sie eine Lagrangefunktion für das System angeben und die Euler-Lagrange-Gleichungen bilden, (ii) unter Verwendung einer Kräftegleichung.

(b) Es sei h die Höhe des Tisches. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingung, dass zur Zeit $t = 0$ das Seil losgelassen wird, wobei ein Stück der Länge $\ell_0 > \ell$ ($\ell_0 \leq h$) vom Tisch herunterhängt. Zu welcher Zeit t_b erreicht das untere Seilende den Boden? (Unterscheiden Sie die Fälle $h > \ell$ und $h \leq \ell$.)

[5 Punkte]

Aufgabe 33
Zwei Massenpunkte mit Massen m_1 und m_2 seien durch einen masselosen Faden der Länge ℓ verbunden, der durch ein Loch in einer Tischplatte geführt wird. Der herunterhängende Massenpunkt m_2 kann sich unter dem Einfluss der Schwerkraft nur in vertikaler Richtung bewegen, der andere Massenpunkt kann sich auf der Tischplatte uneingeschränkt bewegen (ohne Einfluss von Reibung; die Tischplatte ist senkrecht zur Richtung der Schwerkraft ausgerichtet).

(a) Welcher Typ von Zwangsbedingungen liegt hier vor und wieviele Freiheitsgrade hat das System?

(b) Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten und geben Sie eine Lagrangefunktion an.

(c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrangegleichungen. Untersuchen Sie, welche Symmetrien die Lagrangefunktion besitzt, und schliessen Sie daraus auf die Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung) des Systems.

(d) Diskutieren Sie, für welche Anfangsbedingungen bzw. Bedingungen an m_1 und m_2
(i) m_2 zu allen Zeiten in Ruhe bleibt, (ii) m_2 nach endlicher Zeit in Ruhe bleibt, (iii) m_1 nach endlicher Zeit in Ruhe bleibt.

[5 Punkte]

Aufgabe 34

Die Lagrangefunktion eines Massenpunktes der Masse m, der sich in der x-y-Ebene bewegen kann, habe die Form

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \lambda(\dot{x}y - x\dot{y}),$$

wobei $\lambda \neq 0$ eine Konstante ist.

(a) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für den Massenpunkt. Ermitteln Sie die Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt. (Wie kann diese Kraft interpretiert werden, wenn angenommen wird, dass der Massenpunkt eine Ladung trägt?)

(b) Bestimmen Sie die zu x, y kanonisch konjugierten Impulse p_x, p_y. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Größen und dem üblichen Impuls?

(c) Untersuchen Sie, welche Symmetrien die Lagrangefunktion besitzt, und bestimmen Sie daraus Erhaltungsgrößen (Integrale der Bewegung).

(d) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion und geben Sie die Hamiltonschen Gleichungen an. Zeigen Sie direkt die Äquivalenz der Euler-Lagrange-Gleichungen zu den Hamiltonschen Gleichungen.

[5 Punkte]

Aufgabe 35* (Zusatzaufgabe)

Zwei Massenpunkte mit Massen m_1 und m_2 seien durch einen masselosen Faden der Länge ℓ verbunden. Massenpunkt m_1 bewege sich dabei auf einer Schale

$$S = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : ||\vec{r}|| = R, \quad r_3 < 0\},$$

wobei $R > 0$ $(R < \ell)$ eine Konstante ist. Der Faden wird durch ein Loch am tiefsten Punkt $(0, 0, -R)$ der Schale geführt. Der Massenpunkt m_2 hängt am Faden herab und kann sich nur in vertikaler Richtung bewegen. Es wirke die Schwerkraft in Richtung von $-\vec{e}_3$. Zusätzlich wirke auf den Massenpunkt m_1 eine durch die Bindung an S hervorgerufene Reibungskraft

$$\vec{F}^D(\dot{\vec{r}}_{(1)}) = -k||\dot{\vec{r}}_{(1)}||^2,$$

wobei $k > 0$ eine geeignete Konstante ist.

(a) Wählen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten und bestimmen Sie die generalisierten Reibungskräfte $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n(q, \dot{q})$, einerseits direkt mit Hilfe der Koordinatisierungsabbildung, andererseits über eine geeignete Dissipationsfunktion.

(b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems.

(c) Welche Ruhelagen des Systems gibt es? Besitzt das System Erhaltungsgrößen?

[5 Zusatzpunkte]

Aufgabe 36* (Zusatzaufgabe)
Für eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei f'' ohne Nullstelle, d.h. f' ist invertierbar. Es sei $g(z) = f'^{-1}(z)$, $f^*(x) = xf'(x) - f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ und

$$(\mathcal{L}f)(z) = f^*(g(z)) = zg(z) - f(g(z)) \quad (z \in f'(\mathbb{R}))$$

heißt die *Legendretranformierte* von f.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(\mathcal{L}f)(y) = f(y)$ gilt.

(b) Auf $\mathbb{R}^2$ sei die C^2-Funktion $T(q, u) = \frac{1}{2}m(q)u^2$ gegeben, wobei $m(q) > 0$ für alle $q \in \mathbb{R}$. Ausserdem sei $V(q)$ eine beliebige reelle C^2-Funktion auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie für festgehaltenes q die Legendretransformierte $H(q, p)$, mit $p = \frac{\partial}{\partial u}L(q, u)$, der Funktion

$$u \mapsto L(q, u) = T(q, u) - V(q)\,.$$

[5 Zusatzpunkte]

Abgabe: Bis Mittwoch, den 9.1.2008 in der Vorlesung.