Prof. Dr. R. Verch
PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 28

In einem System aus N Teilchen wirke eine nur von der Zeit und den Positionen der Teilchen abhängige Gesamtkraft, die als konservativ vorausgesetzt wird. Zeigen Sie, dass bei Abwesenheit von Zwangsbedingungen die Euler-Lagrange-Gleichungen zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen äquivalent sind. [5 Punkte]

Aufgabe 29

Eine (idealisiert punktförmige) Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einem (idealisiert infinitesimal dünnen) Draht, der zu einem Kreis vom Radius R gebogen sei. Diese Drahtschlaufe rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (0, 0, |\vec{\omega}|)$ aufrecht stehend um die $\vec{e}_3$-Achse, auf die Perle wirke dabei die Gewichtskraft $\vec{G} = (0, 0, -gm)$.

(a) Geben Sie in geeigneten generalisierten Koordinaten eine Lagrangefunktion für die Bewegung der Perle an.

(b) Ermitteln Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Bewegung der Perle.

(c) Es gibt Gleichgewichtslagen der Perle, d.h. solche Bahnkurven, bei denen die Perle bzgl. des mitrotierenden Koordinatensystems ruht. Ermitteln Sie diese; geben Sie dabei insbesondere diejenigen an, für die Gewichts- und Zentrifugalkraft (unter den der Perle auferlegten Zwangsbedingungen) im Gleichgewicht sind.

[5 Punkte]

Aufgabe 30

Ein Massenpunkt der Masse m in zwei Dimensionen sei an die Bahnkurve K gebunden, die folgende Parameterdarstellung hat:

$$K = \{a(\theta - \sin\theta)\vec{e}_1 + a(\cos(\theta) - 1)\vec{e}_2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

dabei ist a eine positive Konstante. Auf den Massenpunkt wirkt die Schwerkraft $\vec{G} = -mg\vec{e}_2$.

(a) Geben Sie in geeigneten Koordinaten eine Lagrangefunktion und die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Bewegung des Massenpunktes an.

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen für kleine Werte des Zeitparameters t und unter der Annahme, dass für die Energie des Teilchens gilt $E \leq 2mga$, wenn die potentielle Energie so gewählt ist, dass sie am tiefsten Punkt der Kurve K (bei minimalem $\vec{e}_2$-Koordinatenwert) den Wert 0 hat. Weshalb sollte man diese Annahme machen?
(Hinweis hierzu: Zur vollständigen Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen ist es sinnvoll, von $\theta(t)$ zu $u(t) = \cos(\theta(t)/2)$ überzugehen und die sich ergebende Diferentialgleichung für $u(t)$ zu lösen. Die gemachte Annahme hat mit der Möglichkeit der Rücktransformation von $u(t)$ zu $\theta(t)$ zu tun.)

(c) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$ des Massenpunkts für alle Zeiten $t \geq 0$ zu den Anfangsbedingungen

$$\vec{r}(t=0) = \pi a\vec{e}_1 - 2a\vec{e}_2 \quad \tfrac{d}{dt}\vec{r}(t=0) = 2\sqrt{ga}\vec{e}_1\,.$$

[5 Punkte]

Aufgabe 31

Es sei $R > 0$ fest vorgegeben und O_R sei die Oberfläche eines Zylinders mit Radius R,

$$O_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}\,.$$

Ermitteln Sie für zwei Punkte P_0 und P_1 auf O_R die Kurve minimaler Länge (Geodäte), die beide Punkte verbindet. Drücken Sie dafür die Länge einer C^2-Kurve $\gamma : [0,1] \to O_R$, die P_0 und P_1 verbindet, als Funktional zu einer geeigneten "Lagrangefunktion" aus, geben Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen an, und bestimmen Sie die Lösungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen $\gamma(t=0) = P_0$, $\gamma(t=1) = P_1$. Führen Sie dazu Zylinderkoordinaten ein und wählen Sie $P_0 = (R,0,0)$ und $P_1 = (R\cos\varphi_1, R\sin\varphi_1, z_1)$. Interpretieren Sie anhand von Skizzen die Geodäten geometrisch, besonders für die folgenden Fälle: (i) $z_1 = 0$, (ii) $\phi_1 = 0$, (iii) $\pi/2 < \phi_1 < \pi$, $z_1 > 0$. Was lässt sich hinsichtlich der Eindeutigkeit der Geodäten sagen?

[5 Punkte]

Abgabe: Bis Freitag, den 21.12.2007 15.00 Uhr bei Dr. Marecki im ITP (oder zuvor in der VL).