Prof. Dr. R. Verch

PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 19

(i) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\rm diff}(\theta)$ und den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\rm tot}$ für die Streuung von Teilchen der Masse m mit vorgegebener (asymptotischer) Energie E am abstoßenden Zentralpotential $U(r) = B \cdot r^{-2}$ $(r > 0)$, $B > 0$ ist dabei eine Konstante. [4 Punkte]

(ii) Harte Kugeln mit Radius r_p und Masse m_p ("Projektile") werden an einer harten Kugel mit Radius R_t und Masse m_t ("Target") elastisch gestreut. Es soll dabei das Reflexionsgesetz gelten, d.h. Einfallswinkel und Ausfallswinkel stimmen dem Betrag nach überein. Berechnen Sie für diese Situation den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\rm diff}(\theta)$ und den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\rm tot}$ im Laborsystem $(\theta = \theta_{lab})$ unter der Annahme, dass $m_t \gg m_p$ gilt. [2 Punkte]

(iii*) [**Zusatzaufgabe**] Wie in (ii), aber unter der Annahme $m_t = m_p$. [3 Zusatzpunkte]

Hinweis: Für (i) verwende die Beziehung

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_{\rm min}}^{\infty} \frac{\ell}{r^2\sqrt{2m}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{{\rm eff},\ell}(r)}}$$

Aufgabe 20* [**Zusatzaufgabe**]

Es sei ein System aus N Teilchen mit Massen $m_{(j)}$ und Bahnkurven $\vec{r}_{(j)}(t)$ gegeben. Wenn $G(t)$ eine mechanische Größe des Systems zur Zeit t darstellt, dann nennt man

$$\overline{G} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} G(t)\, dt$$

das *zeitliche Mittel* von G (vorausgesetzt, dass der Limes existiert).
Gehen Sie davon aus, dass es ein Potential $U(\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)})$ gibt, so dass die Kraft auf das j-te Teilchen gegeben ist durch $-\nabla_{\vec{r}_{(j)}} U$, und setzen Sie $V(t) = U(\vec{r}_{(1)}(t), \ldots, \vec{r}_{(N)}(t))$, $\vec{V}_{(j)}(t) = -(\nabla_{\vec{r}_{(j)}} U)(\vec{r}_{(1)}(t), \ldots, \vec{r}_{(N)}(t))$ (für Bahnkurven, die Lösungen der Bewegungsgleichungen sind). Mit $T(t)$ sei die gesamte kinetische Energie des Systems zur Zeit t bezeichnet. Nehmen Sie an, dass (I) die Bahnkurven der Teilchen zu allen Zeiten in einem festen, endlichen Raumbereich bleiben und (II) dass die Geschwindigkeiten aller Teilchen zu allen Zeiten einen fest vorgegebenen Wert nicht überschreiten.
Zeigen Sie dann, dass der *Virialsatz* gilt, d.h. die Beziehung

$$2\overline{T} = \overline{\textstyle\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_{(j)} \cdot \vec{V}_{(j)}}\,.$$

Was folgt spezieller in dem Fall, dass U homogen ist vom Grade s, d.h. dass für jedes $\lambda > 0$ gilt

$$U(\lambda\vec{r}_{(1)}, \ldots, \lambda\vec{r}_{(N)}) = \lambda^s U(\vec{r}_{(1)}, \ldots, \vec{r}_{(N)}) \quad ?$$

[5 Zusatzpunkte]

Aufgabe 21* [Zusatzaufgabe]

Eine Rakete habe beim Start die Geschwindigkeit $\vec{v} = 0$ und die Masse M, die aus dem Leergewicht M_0 und der Treibstoffmasse P besteht. Nach dem Start stoße die Rakete kontinuierlich den Treibstoff mit einer konstanten Ausströmgeschwindigkeit u (relativ zu d. Rakete) aus, was zu einer konstanten Rate des Gewichtsverlust α (kg/s) führt.

(a) Benutzen Sie den Impulserhaltungssatz, um die Bewegungsgleichung für die Rakete im gravitationsfreien Fall aufzustellen, und lösen Sie sie.

(b) Nehmen Sie an, dass die Rakete vertikal in einem konstanten Gravitationsfeld (konstante Fallbeschleunigung g) steigt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Höhe als Funktionen der Zeit.

Sie können die folgenden Werte benutzen: $M_0 = 15 \cdot 10^3$ kg, $P = 150 \cdot 10^3$ kg, $\alpha = 250$ kg/s, $u = 4$ km/s (etwa die Hauptstufe der Ariane 5 mit dem Vulcain Triebwerk).

[5 Zusatzpunkte]

Abgabe: Am Mittwoch, den 28.11.2007 in der VL.