Prof. Dr. R. Verch
PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

**Inst. f. Theoretische Physik**

Wintersemester 2007/08

---

# Übungen zur Theoretischen Mechanik
# Aufgabenblatt 6

---

**Aufgabe 16** Ein Stern bewege sich auf einem kreisformigen Umlaufbahn um das Zentrum einer kugelsymmetrischen Galaxie. Nehmen Sie an, dass die Galaxie eine kontinuierliche Massenverteilung besitzt, mit der Massendichte $\varrho(\|\vec{r}\|) = A > 0$ für $\|\vec{r}\| \leq R$ und $\varrho(\|\vec{r}\|) = 0$ für $\|\vec{r}\| > R$, und berechnen die Gravitationskraft die auf den Stern wirkt. Ermitteln Sie die (zeitlich konstante) Geschwindigkeit des Sterns als Funktion des Abstands vom Galaxiezentrum (diese Funktion ist als Rotationskurve d. Galaxie bekannt).

**Aufgabe 17** Ein Planet der Masse $m_p$ bewege sich um die Sonne (Masse $M_\odot$) unter dem Einfluss eines $C^1$-Zentralpotentials $U(r)$, $r > 0$.

(a) Der Drehimpuls einer finiten Bahnkurve sei

$$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für die Perihelverschiebung $\Delta\varphi$ der Bahnkurve die (in der VL ohne Beweis angegebene) Formel

$$\Delta\varphi = \pm 2 \int_{\tilde{r}_{min}}^{\tilde{r}_{max}} \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{[E - U_{\mathsf{eff},\ell}(r)]^{1/2}} \, dr$$

gültig ist.

*Hinweis:* In der Vorlesung wurde für das Newtonsche Potential eine Differentialgleichung für den Radius der Bahnkurve in Abh. des Polarwinkels angegeben. Argumentieren Sie analog für eins allgemeine Zentralpotential und ermitteln Sie daraus eine Differentialgleichung für den Polarwinkel als Funktion des Bahnradius.

(b) Betrachten Sie das Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \qquad (r > 0),$$

wobei $A$ und $B$ positive Konstanten sind, und berechnen Sie die Perihelverschiebung $\Delta\varphi$ im Abhängigkeit von $A$ und $B$.

**Aufgabe 18** Zwei ideal harte Kugeln $K_1$ und $K_2$ mit den Massen $m_{(1)} \leq m_{(2)}$ und den Radien $R_1, R_2 > 0$ stoßen elastisch zusammen. Der Stoßprozess werde im Laborsystem beschrieben, d.h. $K_2$ ruhe vor dem Stoß bzgl. des zugrundeliegenden Inertialsystems, während $K_1$ sich vor dem Stoß auf $K_2$ zubewegt.

(a) Es sei $T_{(1)}$ die kinetische Energie von $K_1$ vor dem Stoß, $T'_{(1)}$ die kinetische Energie von $K_1$ nach dem Stoß, und $\gamma = \cos\theta$, wobei $\theta$ der Streuwinkel ist, sowie $\alpha = m_{(1)}/m_{(2)}$. Zeigen Sie, dass das Verhältnis $T'_{(1)}/T_{(1)}$ der kinetischen Energien von $K_1$ ausgedrückt werden kann durch

$$T'_{(1)}/T_{(1)} = \frac{2\gamma^2 + \alpha^2 - 1 + 2\gamma\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 - 1}}{(1+\alpha)^2}$$

(b) Gehen Sie spezieller davon aus, dass der Stoßprozess zentral verläuft (zentraler elastischer Stoß), und ermitteln Sie den Energieverlust von $K_1$ beim einzelnen Stoßprozess. Wenden Sie das Ergebnis auf folgendes Problem an: In einem Kernreaktor entstehen bei der Spaltung von $U^{235}$-Kernen Neutronen mit einer Energie von etwa $2$MeV($= 2 \cdot 10^6$eV). Wieviele zentrale elastische Stöße mit den als ruhend betrachteten Atomkernen der Moderatorsubstanz

   (a) Graphit
   (b) Deuterium

   sind erforderlich, um die Neutronen auf thermische Energie (ca. $0,03$eV) abzubremsen?

*Hinweis zu (a):* Zeigen Sie zuerst, dass

$$T'_{(1)}/T_{(1)} = \left(\frac{m_{(2)}}{M}\right)^2 - \left(\frac{m_{(1)}}{M}\right)^2 + \frac{2v'_{(1)}v_{cm}}{(v_{(1)})^2} \cdot \gamma$$

gilt, mit

$$v_{(1)} = \|\vec{v}_{(1)}\|,$$
$$v'_{(1)} = \|\vec{v}'_{(1)}\|,$$
$$v_{cm} = \|\vec{v}_{cm}\|,$$

$v_{cm} =$ Geschwindigkeit des Schwerpunkts von $K_1$ und $K_2$, $M = m_{(1)} + m_{(2)}$.

Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte.

**Abgabe: Am Dienstag, den 20.11.2007 bei Dr. Fritzsche in den Übungen oder bei Dr. Marecki in ITP.**