Prof. Dr. R. Verch
PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 10 Ein Massenpunkt führt eine eindimensionale Bewegung aus in einem vom Ort x abhängigen Kraftfeld der Form

$$F(x) = F_0 \sin(kx),$$

wobei F_0 und k (positive) Konstanten sind.

(a) Berechnen Sie die potentielle Energie des Massenpunktes, wobei Sie über die Integrationskonstante so verfügen, dass das Potential bei $x = 0$ den Wert Null hat. Für welche Werte der Gesamtenergie kann sich der Massenpunkt beliebig weit weg vom seinem Anfangsort entfernen?

(b) Geben Sie alle Lösungen der Bewegungsgleichung an, die sich dem Punkt $x = 0$ annähern, ohne ihn zu erreichen.

(c) Geben Sie näherungsweise die Lösung der Bewegungsgleichung an mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ unde der Energie $E \gg F_0/k$.

Hinweis: Enwickeln Sie für (c) das bei der allgemeinen Lösung auftretende, nicht geschlossen lösbare Integral nach $F_0/(Ek)$ bis zu Termen erster Ordnung.

Aufgabe 11

(a) Gegeben seien das Fraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a\sin(bx_2) \\ x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ($a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten), und die perametrisierte Kurve

$$t \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t^2/2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Berechnen Sie die Arbeit $A_{\vec{r}}(t_2, t_1)$ entlang der Kurve im Kraftfeld $\vec{F}$.

(b) Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} ax_3 \\ ax_3 \\ bx_3 \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ($a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten). Berechnen Sie die Arbeit $A_{\vec{r}}(t_2, t_1)$ entlang einer Kurve $t \to \vec{r}(t)$, die mit konstanten Steigungswinkel α auf dem Mantel eines entlang der x_3-Achse ausgerichteten und zentrierten Zylinders vom Radius R verläuft ("Schraubenlinie"), und die ihren Anfangspunkt bei $(0, R, 0)$ hat, ihen Endpunkt bei $(0, R, 4\pi R\tan\alpha)$.

Aufgabe 12 Prüfen Sie, ob die folgenden Vektorfelder konservativ (Gradientenfelder) sind[1].

(a): $\vec{V} = \dfrac{\vec{x}}{r^3}$ (b): $\vec{V} = \dfrac{\vec{e}_z}{r^3}$

(c): $\vec{V} = \dfrac{\vec{e}_z}{r^3} - \dfrac{3x_3\,\vec{e}_r}{r^4}$ (d): $\vec{V} = \vec{e}_z$

(e): $\vec{V} = \left(\dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, -\dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0\right)$ (f): $\vec{V} = (x_2, -x_1, 0)$

wobei $r = \|\vec{x}\|$, $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$, $\vec{e}_r = \vec{x}/r$. Geben Sie im entsprechenden Fall Potentiale an.

Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte.

Abgabe: Am Mittwoch, den 7.11.2007 in der Vorlesung.

[1] Für singulare Vektorfelder betrachten Sie nur das Gebiet $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.