Prof. Dr. R. Verch

PD Dr. S. Fritzsche
Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2007/08

Übungen zur Theoretischen Mechanik
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 Skizzieren Sie schematisch (nicht messstabsgetreu) die Weltlinie von Erde und Mond während eines Jahres in einem Raum-Zeit-Diagramm. Stellen Sie nur die Ekliptik (die Ebene der Bewegung) und die Zeit-Achse dar. Skizzieren Sie zusätzlich wie die räumliche Bahnkurve aussieht.

Aufgabe 2 Die Menge (Gruppe) aller n-dimensionalen *orthogonalen* Matrizen wird mit $O(n)$ bezeichnet. Sie ist definiert durch

$$D^T D = \mathbf{1} \qquad \forall D \in O(n),$$

wobei D^T die zu D transponierte Matrix und $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix bezeichnen. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} det\, D &= \pm 1, \\ D^T &= D^{-1} \end{aligned}$$

gelten. Eine $O(3)$-matrixwertige Funktion wird durch

$$D_3(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

definiert, wobei ω eine reelle Konstante ist. Verifizieren Sie, dass für jedes t die Matrix $D_3(t)$ tatsächlich zu $O(3)$ gehört. Überzeugen Sie sich, dass die Wirkung von $D(t)$ auf Vektoren (Multiplikation der Vektoren mit $D_3(t)$) eine Drehung um die z-Achse ($\vec{e}_3$-Achse) beschreibt.

Es sei $t \mapsto D(t) = (D_{jk}(t))_{j,k=1}^3$ $(t \in \mathbb{R})$ eine C^1 Abbildung von den reellen Zahlen in die Menge der $O(3)$-Matrizen (d.h. alle Matrixeinträge $t \mapsto D_{jk}(t)$ sind einmal steig differenzierbar). Zeigen Sie: Wenn $D(0) = \mathbf{1}$ gilt, dann ist

$$A := \frac{d}{dt} D(t)\Big|_{t=0}$$

eine antisymmetrische Matrix, d.h. es gilt $A^T = -A$. Prüfen Sie dies für den Fall $t \mapsto D_3(t)$ explizit nach.

Aufgabe 3 Es seien D eine Matrix in $O(3)$, $\vec{w}, \vec{k} \in \mathbb{R}^3$, $\beta > 0$, und $\lambda \in \mathbb{R}$. Man fasst diese Daten zusammen zu einem Paar $(G, \boldsymbol{g})$, wobei G eine 4×4 Matrix ist und $\boldsymbol{g}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^4$, definiert durch

$$G := \begin{pmatrix} D & \vec{w} \\ \vec{0}^T & \beta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} := \begin{pmatrix} \vec{k} \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Transformation

$$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{x}' \\ t' \end{pmatrix} = T_{(G,\boldsymbol{g})} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} D\vec{x} + t\vec{w} + \vec{k} \\ \beta t + \lambda \end{pmatrix}$$

bezeichnet man dann als *Galilei-Transformation*.
Zeigen Sie, dass die Galilei-Tranformationen eine Gruppe bilden. Weisen Sie dazu nach, dass

$$T_{(G_1,\boldsymbol{g}_1)} \circ T_{(G_2,\boldsymbol{g}_2)} = T_{(G_1 G_2, G_1 \boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{g}_1)}$$

gilt, und bestimmen Sie das neutrale der Gruppe sowie das Inverse zu $T_{(G,\boldsymbol{g})}$.

Wert jeder Aufgabe = 5 Punkte.

Abgabe: Am Mittwoch, den 17.10.2007 in der Vorlesung.