UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Theoretische Mechanik

Übungsblatt 9
Musterlösungen

25 Aufgabe

𝔚ir parametrisieren den Stab (in der $x-y$ Ebene) durch:

$$x = \sigma\cos\Omega,$$
$$y = \sigma\sin\Omega,$$

wobei $\sigma \geqslant 0$ und $\Omega = \Omega(t) = \int^t \omega(t)\,dt$. Zu der Zwangsfläche gibt es einen (vom Ort unabhängigen) Vektor $t^i = \frac{dr^i}{d\sigma} = (\cos\Omega, \sin\Omega)$ $(r^1 \equiv x, r^2 \equiv y)$. Das d'Alebmertsche Prinzip lautet:

$$\vec{t}\cdot(\ddot{\vec{r}} - \vec{F}) = 0,$$

wobei im unseren Fall keine äußere Kräfte vorhanden sind, $\vec{F} = 0$. Setzen wir die nur vom σ abhängige Form der $\vec{r}$ ein, so erhalten wir

$$\ddot{\sigma} = \sigma\omega^2,$$

was auch zu erwarten war, denn die Coriolis-Kraft senkreht zum Stab wirkt, und deshalb nur die Fliehkraft auf den Massenpunkt wirkt. Diese harmonische DGl. wird allgemein von

$$\sigma = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

gelöst. Die spezielle Lösung, (ii), mit $\sigma(0) = r_0$, $\dot{s}(0) = 0$ erhielt man für $A = B = r_0/2$. Anderseits, (iii), der Massenpunkt sich dem Ursprung beliebig nähert für $t \to \infty$ dann und nur dann wenn $\dot{\sigma}(0) = -|\omega|\sigma(0)$.

26 Aufgabe

𝔚ir bezeichnen wieder $r^1 \equiv x, r^2 \equiv y, r^3 \equiv z$, und parametrisieren die Zwangsfläche,

$$x + az - \ell(t) = 0$$

durch $\vec{r} = (\ell - a\sigma, \tau, \sigma)$. Es gibt zwei Tangentialvektoren (v. Verrückungen):

$$\vec{w} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = (0, 1, 0),$$

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{d\sigma} = (-a, 0, 1).$$

Aus dem d'Alebmertschen Prinzip erhalten wir:

$$\ddot{y} = 0$$

(in der $\vec{w}$-Richtung), und

$$-a\ddot{x} + \ddot{z} + g = 0,$$

(aus $\vec{t} \cdot (\ddot{\vec{r}} - \vec{F}) = 0$). Setzen wir die parametrisierung von x und z ein, so ergibt sich die Digfferentialgleichung

$$\ddot{\sigma} = \ddot{\ell}\,\frac{a}{1+a^2} - g\,\frac{1}{1+a^2}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\sigma(t) = \frac{a\ell(t) - gt^2/2}{1+a^2} + v_0 t + \sigma_0,$$

wobei v_0 und σ_0 beliebige Konstanten sind. Für $\ell = ct^3$ die angegebene Anfangsbedingungen sind equivalent zu $v_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$ (d.h. $\sigma(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$). Das Minimum von $z(t)$ wird dann erreicht, wenn auch $\sigma(t)$ ein Minimum hat, d.h. wenn $\dot{s}(t_m) = 0$. Wir erhalten $t_m = g/3ac$ und

$$\sigma_m = z_m = -\frac{g^3}{54\,a^2c^2}$$

.

27 Aufgabe

𝔇er Fall des konstanten a wird zunächst beschrieben. Mit der Zwangsbedingung

$$\Phi = \frac{m}{2}(x^2 + y^2 - a^2) = 0$$

lauten die Lagrangesche Gleichungen

$$m\ddot{r}^i = F^i + \lambda\partial^i\Phi$$

wie folgt:

$$\ddot{x} = \lambda x,$$
$$\ddot{y} = \lambda y - g.$$

Aus der zweiten Gleichung zusammen mit $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ folgt

$$\lambda = \frac{gy}{a^2} - \frac{\dot{x}^2}{y^2},$$

(wobei nach der Differentiation auch die DGl. für $\ddot{x}$ benutzt wurde). Wir finden die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = \frac{gxy}{a^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{y^2},$$
$$\ddot{y} = \frac{-gx^2}{a^2} - \frac{\dot{x}^2}{y}.$$

(diese Gleichungen sind nicht unabhängig, denn sie $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ für alle Zeiten erhalten, so dass es sich eigentlich nur um eine DGl. handelt) und die Zwangskräfte

$$Z_x = \frac{gxy}{a^2} - \frac{\dot{x}^2 x}{y^2},$$
$$Z_y = \frac{gy^2}{a^2} - \frac{\dot{x}^2}{y}.$$

Die letzten beide Terme beschreiben eine Kraft die die Fliehkraft kompensiert, während die ersten Terme kompensieren die x- und y- Komponenten der zu der Stange parallelen Komponente der Gravitationskraft.

Die d'Alembersche Beschreibung ist einfacher: wir parametrisieren die Zwangsfläche

$$(x, y) = (a \sin\varphi, -a\cos\varphi),$$

finden den Tangentialvektor

$$t^i = \partial_\varphi r^i = a(\cos\varphi, \sin\varphi),$$

berechnen $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ und setzen sie in die d'Alembersche Gleichung

$$t^i(\ddot{r}^i - F^i) = 0$$

ein. So erhielt man sofort

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{a}\sin\varphi,$$

d.h. die Gleichung des (physikalischen) Pendels.

Im allgemeinen Fall, $a = a(t)$, gilt:

$$\dot{y} = \frac{a\dot{a} - x\dot{x}}{y}$$

$$\lambda = \frac{gy}{a^2} + \frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 - \dot{x}^2}{a^2} - \frac{(a\dot{a} - x\dot{x})^2}{a^2 y^2}$$

Die Zwangskräfte sind durch

$$\begin{aligned} Z_x &= \lambda x, \\ Z_y &= \lambda y \end{aligned}$$

gegeben und die Lagrangesche Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= Z_x, \\ \ddot{y} &= Z_y - g. \end{aligned}$$

Anderseits, wurde die Zwangsfläche durch

$$(x, y) = \big(a(t)\sin\varphi, -a(t)\cos\varphi\big)$$

parametrisiert, dann ergebe sich

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= a\ddot{\varphi}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2\sin\varphi + 2\dot{a}\dot{\varphi}\cos\varphi + \ddot{a}\sin\varphi, \\ \ddot{y} &= a\ddot{\varphi}\sin\varphi + a\dot{\varphi}^2\cos\varphi + 2\dot{a}\dot{\varphi}\sin\varphi - \ddot{a}\cos\varphi, \end{aligned}$$

und die d'Alembersche Gleichungen

$$\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi + g\sin\varphi = 0$$

wurden sich auf

$$a\ddot{\varphi} + 2\dot{a}\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$

vereinfachen.