UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 8
Musterlösungen

22 Aufgabe

Es gilt

$$y = Dx + s,$$

wobei y: Koordinaten in einem BS, x:Koordinaten in einem IS, D:zeitabhängige Drehmatrix, s:zeitabhängiger Vektor. Das Ziel ist die Bewegungsgleichungen $m\ddot{y} = \mathcal{F}(y, \dot{y})$ aufzustellen. Wir finden

$$\dot{y} = \dot{D}x + D\dot{x} + \dot{s},$$

d.h.

$$\dot{y} = \omega \times (y - s) + \dot{s} + D\dot{x},$$

und gleichzeitig

$$\dot{x} = D^{-1}[\dot{y} - \dot{s} - \omega \times (y - s)].$$

Weiterhin gilt:

$$\ddot{y} = \dot{\omega} \times (y - s) + \omega \times (\dot{y} - \dot{s}) + \ddot{s} + \dot{D}\dot{x} + D\ddot{x},$$

wobei

$$\dot{D}\dot{x} = \omega \times [\dot{y} - \dot{s} - \omega \times (y - s)].$$

wir erhalten damit

$$\ddot{y} = \dot{\omega} \times (y - s) + 2\omega \times (\dot{y} - \dot{s}) - \omega \times \omega \times (y - s) + \ddot{s} + F'(y, \dot{y})/m,$$

wobei die transformierte Kraft ist durch

$$F'(y, \dot{y}) = DF\left[D^{-1}(y - s), D^{-1}(\dot{y} - \dot{s} - \omega \times y\right]$$

gegeben. Alle hier auftretende fiktive Kräfte wurden in der Vorlesung benannt.

23 Aufgabe

In der nullten Ordnung ist die radiale Geschwindigkeit durch

$$v_r = v_0 - gt$$

gegeben. Es sei F_y die Kraft in der azimutalen Richtung (etwa entlang φ) und $v_x = \cos\lambda \cdot v_r$ die Komponente der Geschwindigkeit v_r senkrecht zu der Drehachse ($\lambda = 0$ am Äquator) und senkrecht zu F_y. Aus der Coriolis-Kraft-Formel

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

folgt, dass die Kraft F_y proportional zu $\omega = |\vec{\omega}|$ ist. Ursprunglich gibt es keine Coriolis-Kräfte in der x- oder r-Richtung; diese entstehen erst wenn $v_y \neq 0$ und werden von dem zweiten Ordnung (d.h. proportional zu ω^2). Für die Zwecke dieser Aufgabe werden solche effekte vernachlässigbar. Die Bewegung in der r-Richtund verläuft also von den Coriolis-Kräften unbeeinflußt. Wir finden daher

$$\frac{dv_y}{dt} = -F_y/m = -2\cos(\lambda)\,\omega \cdot (v_0 - gt),$$

$$v_y = -2\cos(\lambda)\,\omega(v_0 t - gt^2/2),$$

$$y(t) = -2\cos(\lambda)\,\omega(v_0 t^2/2 - gt^3/6).$$

Das Objekt erreicht die maximale Höhe für $t = T = v_0/g$; die Ablenkung am diesen Zeitpunkt beträgt

$$y(T) = -\frac{2\cos(\lambda)\,\omega\, v_0^3}{3g^2},$$

und ist *negativ* (das Objekt wird nach Westen abgelenkt).

24 Aufgabe

Teil (ia). Das Gesamtpotential ist:

$$U_{ges} = -\frac{GM}{r} - \frac{\omega^2 x^2}{2},$$

wobei $r^2 = x^2 + z^2$, und die Equipotentialflächen, $U_{ges} = C$ sind gegeben durch

$$z^2 = \frac{1}{(C - \alpha x^2)^2} - x^2,$$

wobei $\alpha = \omega^2/2GM$.

Teil (ib). In der $x - z$ Ebene ist der Tangentialvektor der Fläche $z = z(x)$ proportional zu $\vec{T} = (1, \frac{dz}{dx})$. Die Vektoren der Gravitationskraft und der Fliehkraft (dividiert durch m) sind durch

$$\begin{aligned} \vec{F}_g &= \left(f \cdot \frac{x}{r}, f \cdot \frac{z}{r}\right), \\ \vec{F}_z &= \left(\omega^2 x, 0\right), \end{aligned}$$

mit $f = -GM/r^2$ gegeben. Die Bedingung der mechanischen Gleichgewicht lautet

$$\vec{T} \cdot (\vec{F}_g + \vec{F}_z) = 0,$$

was auf eine Differentialgleichung für $z(x)$,

$$-\frac{GMx}{r^3} + \omega^2 x - \frac{GMz}{r^3}\frac{dz}{dx} = 0,$$

führt. Diese Gleichung läßt sich einfach lösen in dem man sie mit $u = z^2$ und $t = x^2$ umschreibt:

$$\dot{u} - 2\alpha(t+u)^{3/2} + 1 = 0,$$

wobei $\alpha = \omega^2/2GM$. Mit $y = u + t$ findet man sofort

$$y = \frac{1}{(c - \alpha t)^2}$$

also

$$z^2 = \frac{1}{(C - \alpha x^2)^2} - x^2.$$

Teil (ii) Für ein fixiertes C haben wir einerseits

$$R_P = \frac{1}{C}$$

und anderseits

$$R_A(C - \alpha R_A^2) = 1.$$

Daraus folgt für die Erde

$$\frac{R_A}{R_P} - 1 = \alpha R_A^3 = \frac{\omega^2 R_A^3}{2GM} \approx 0.00172,$$

und

$$\frac{R_A - R_P}{R_A} \approx 0.00171.$$

25 Aufgabe

Mit den Bezeichnungen wie im Abb. 1 gilt (für die radiale Geschwindigkeit und azimutale Kraft):

$$v_x = v_r \sin\alpha$$

$$F_\varphi = -2\omega v_x = -2\omega v_r \sin\alpha.$$

Anderseits gilt (für die azimutale Geschwindigkeit und radiale Kraft):

$$F_x = -2\omega v_\varphi,$$

$$F_r = F_x \sin\alpha = -2\omega v_\varphi \sin\alpha.$$

Der Betrag des Corioliskrafts ist damit von der Richtung der Geschwindigkeit unabhängig.

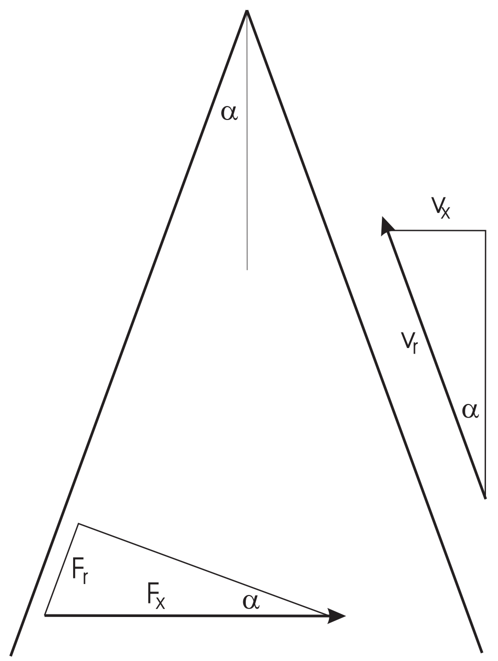

Abbildung 1: Coriolis-Effekt auf der Oberfläche eines Kegels.

Für die Kugel gilt das Gleiche, da wir nur die entsprechende Winkel, wie im Abb. 2., umrechnen mussen (die Zerlegung der Kräfte und den Geschwindigkeiten wurde am Punkt gemacht, und damit hängt nicht von der globalen Geometrie ab). Der Betrag des Corioliskfafts ist in diesem Fall $|F| = 2\omega\cos\theta|v|$.

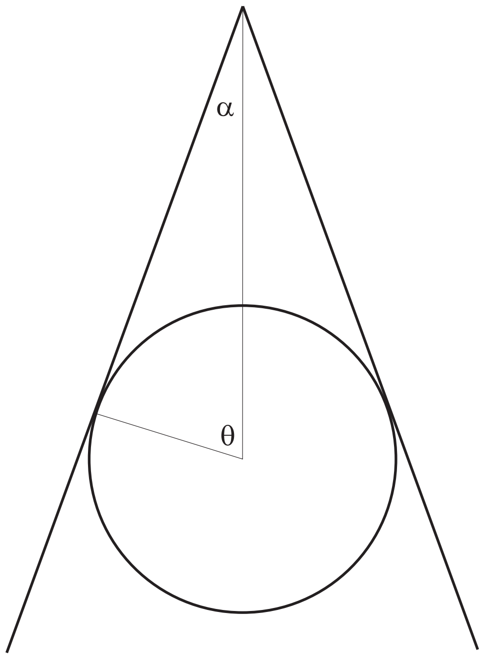

Abbildung 2: Eine Kugel innerhalb eines Kegels; $\theta = \pi/2 - \alpha$.