UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 7

Musterlösungen

19 Aufgabe

Teil (i). Man kann sich leicht überzeugen, dass $\theta = \pi - 2J$, wobei

$$J = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{(b/r^2)\,dr}{\sqrt{1 - b^2/r^2 - U(r)/E}},$$

und b den Stoßparameter bezeichnet. Es ist wichtig, dass bei r_{min} der Nenner eine Nullstelle hat. Für $U = B/r^2$ findet man

$$J = -b \int_{u_{max}}^{0} \frac{du}{\sqrt{1 - (uA)^2}} = \frac{\pi b}{2A},$$

wobei $A = \sqrt{b^2 + B/E}$ und $u = 1/r$. Somit erhalten wir

$$\theta = \pi - \frac{\pi b}{\sqrt{b^2 + B/E}}.$$

Es ist klar, dass θ als Funktion von b monoton fallend ist, und dass $\theta(0) = \pi$, $\theta(\infty) = 0$. Der differentiellen Wirkungsquerschnitt wird aus

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

berechnet. Setzen wir $w = 1 - \theta/\pi$, $w \in [1, 0]$, so ergibt sich zuerst

$$b = \frac{w}{\sqrt{1 - w^2}} \cdot \frac{B}{E},$$

und damit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{B}{E}\right)^2 \frac{1}{(1 - w^2)^2} \frac{\pi}{\sin(\pi w)}.$$

Der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma = \int_{S^2} d\sigma$ ergibt sich aus

$$\sigma = \int_1^0 dw \left(\frac{B}{E}\right)^2 \frac{1}{(1 - w^2)^2},$$

und divergiert wegen der Singularität bei $w = 1$ (d.h. $\theta = \pi$, d.h. $b = \infty$). Diese Konklusion war zu erwarten, denn der totale Wirkungsquerschnitt auch durch

$$\sigma = \int_0^\pi 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta = \int_0^{b_{max}} 2\pi b \, db$$

gegeben ist, wobei b_{max} den Stoßparameter bezeichnet für den $\theta(b_{max}) = \pi$; nun im unseren Fall ist $b_{max} = \infty$.

Teil (ii). In der Näherung $M \gg m$ ruht das Target im Laborsystem vor und nach dem Stoß. Die Geometrie des Stoßes wurde im Abb. 1 abgebildet. Offensichtlich gilt $\sin\varphi = \frac{b}{r+R}$ und damit

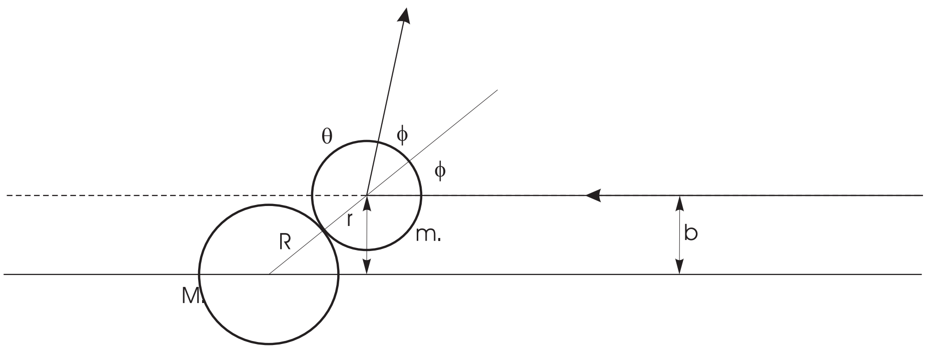

Abbildung 1: Die Geometrie zur Aufgabe 19 Teil (ii).

$b = (r+R)\cos\frac{\theta}{2}$. Für $b \in [0, r+R]$ ist also $\theta(b)$ monoton fallend (s. Abb. 2). Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist einfach zu berechnen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{(r+R)^2}{4}.$$

Es ist zu bemerken, dass dieser Wirkungsquerschnitt isotrop ist. Da der maximale Wert b ist

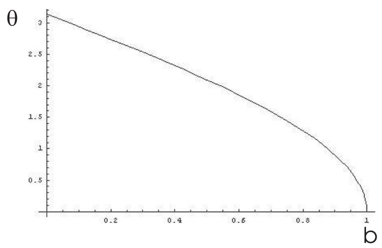

Abbildung 2: Die Abhängigkeit $\theta(b)$ in d. Teil (ii) (hier $r + R = 1$).

$b_{max} = r + R$ (und der minimale $b_{min} = 0$) folgt sofort, dass der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tot} = \pi(r+R)^2$.

Teil (iii). Wir erinnern daran, dass bei eindimensionalen Stoßen von Kuglen gleicher Masse wenn das Target vor dem Stoß ruht, dann muss das Projektil *nach dem Stoß* ruhen. In anderen Worten:

nach dem Stoß verschwindet die Komponente der Projektilgeschwindigkeit parallel zu der Gerade zwischen den Zentren der Kugel. Aus der Abb. 3 sieht man sofort, dass $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, und damit

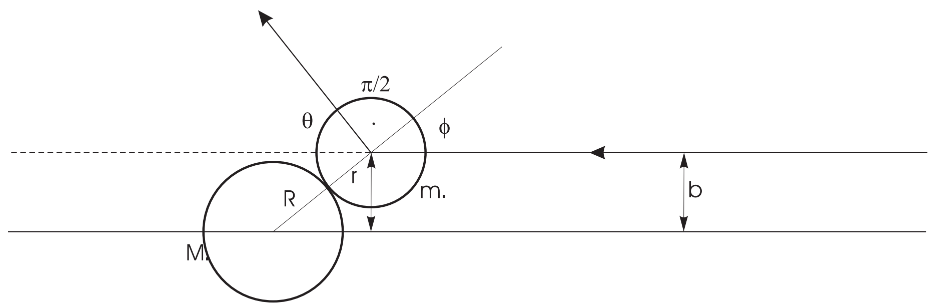

Abbildung 3: Die Geometrie zur Aufgabe 19 Teil (iii).

$$b = (r + R)\cos\theta.$$

Wir finden, dass für $b \in [0, r + R]$ die Funktion $\theta(b)$ wider monoton fallend ist, nun diesmal der Bildbereich ist kleiner: $\theta \in [0, \pi/2]$ (s. Abb. 4). Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (r + R)^2 \cos(\theta), \qquad (\text{für } \theta \in [0, \pi/2]).$$

Die extremale Werte von b sind wie in der Teil (ii), und damit bleibt der totale Wirkungsquerschnitt unverändert.

20 Aufgabe

Wir führen die folgende Notation

$$\dot{x}^i_A \dot{x}^A_i = \sum_{A=1}^{N} \vec{r}_{(A)} \dot{\vec{r}}_{(A)}$$

ein, und finden

$$2\overline{T} = \lim \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} m_A \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{x}^i_A x^A_i \right) - \ddot{x}^i_A x^A_i \right\} dt.$$

Nun der erste Term

$$\lim \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} m_A \frac{d}{dt} \left(\dot{x}^i_A x^A_i \right) = \lim \frac{1}{2\tau} \left(m_A \dot{x}^i_A \, x^A_i \right)\Big|_{-\tau}^{\tau}$$

verschwindet nach der Voraussetzung, und wegen

$$\ddot{x}^A_i = -\partial^A_i U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$$

erhalten wir

$$2\overline{T} = \overline{x^i_A \partial^A_i U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)}$$

d.h. der Virialsatz. Es sei nun $U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \equiv U(y^i)$; für homogene Potenziale,

$$U(\lambda y^i) = \lambda^s U(y^i),$$

mit der Bezeichnung $x^i = \lambda y^i$, gilt

$$s\lambda^{s-1} U(y^i) = \frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^s U(y^i)\right] = \frac{dU(x^i)}{d\lambda} = \frac{\partial U(x^i)}{\partial x^j} \cdot \frac{dx^j}{d\lambda} = \frac{\partial U(x^i)}{\partial x^j} \cdot y^j,$$

und für $\lambda = 1$

$$sU(y^i) = y^i \frac{\partial U(y^j)}{\partial y^i}$$

(Eulerscher Satz über homogenen Funktionen). Der Virialensatz besagt im diesen Fall

$$2\overline{T} = s\overline{U},$$

wobei $\overline{U}$ die potenzielle Energie des Systems bezeichnet.

21 Aufgabe

Wir betrachten ein infinitesimales Intervall. Ursprunglich ist der Impuls der Rakete $M(t) \cdot \dot{v}$; am Ende des Intervalls die Geschwindigkeit der Rakete ist $v + dv$; die Rakete ist auch um dm leichter (Triebstoffmassenverlust), wobei der Triebstoff sich mit der Geschwindigkeit $v + dv - u$ bewegt. Der Impulssatz führt auf

$$M(t)\, dv = u\, dm,$$

d.h.

$$M(t)\, \frac{dv}{dt} = u\alpha.$$

Die linke Seite dieser Gleichung beschreibt die (momentane) Beschleunigung der Rakete. Mit $M(t) = M_0 + P - \alpha t$ finden wir sofort

$$v(t) = u \ln\left(\frac{M_0 + P}{M_0 + P - \alpha t}\right).$$

Im diesen (gravitationsfreien) Fall ist die Endgeschwindigkeit der Ariane 5,

$$v_E = u \ln\left(\frac{M_0 + P}{M_0}\right) \approx 2.4 \cdot u = 9.6 km/s$$

(zu beachten ist, dass diese Geschwindigkeit von α unabhängig ist).

In einem homogenen Gravitationsfeld muss die Beschleunigung der Rakete um die Fallbeschleunigung g erniedrigt werden:

$$M(t)\, \frac{dv}{dt} = u\alpha - M(t) g,$$

und damit

$$v(t) = u \ln \left(\frac{M_0 + P}{M_0 + P - \alpha t} \right) - gT = -u \ln \left[\frac{M(t)}{M(0)} \right] - gt,$$

wobei $t \leqslant T = P/\alpha \approx 600s$. Die Höhe lässt sich jetzt einfach bestimmen:

$$H(t) = \frac{uM(0)}{\alpha} \{[\ln x(t) - 1] \cdot x(t) + 1\} - \frac{gt^2}{2},$$

wobei $x(t) = M(t)/M(0)$. Wir finden

$$\{[\ln x(T) - 1] \cdot x(T) + 1\} \approx 0.69$$

und

$$H(T) \approx 31.4\, km.$$

Leider genügt die angegebene α nicht um positive Höhen in der ursprunglichen Phase des Flugs zu sichern. In der Tat hat $H(t)$ ein Minimum bei $t = 440s$: $H_{min} \approx -171km$ und erst dann steigt (s. Abb. 4). Für grössere α ist die Situation etwas besser (s. Abb. 5).

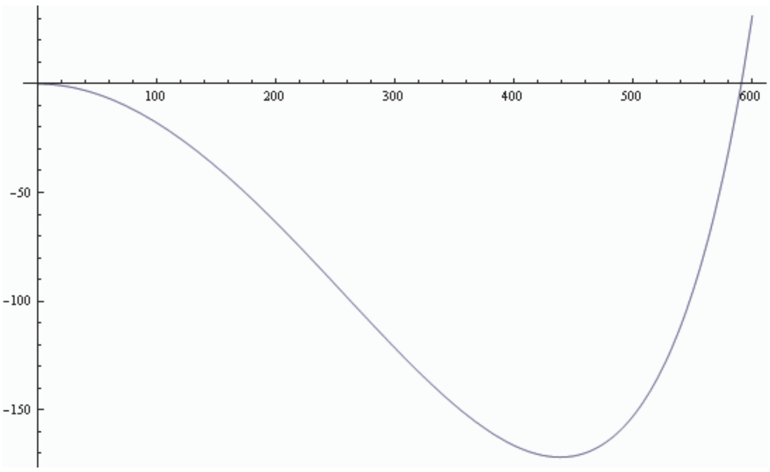

Abbildung 4: Höhe als Funktion der Zeit für $\alpha = 250kg/s$.

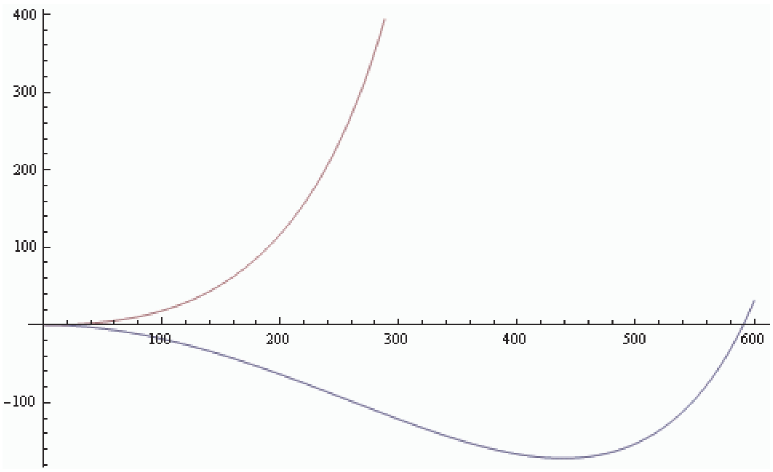

Abbildung 5: Höhe als Funktion der Zeit für $\alpha = 250kg/s$ und $\alpha = 500kg/s$.