UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 6

Musterlösungen

16 Aufgabe

In der Aufgabe 14 wurde gezeigt, dass die Gravitationskraft einer kugelsymmetrischen Massenverteilung identisch mit der Gravitationskraft eines Massenpunktes (d. gleichen Masse) ist, und zusätzlich, dass die Gravitationskraft die auf innerhalb einer sphärischen Massenschale liegende Objekte wirken soll verschwindet. Somit wirkt auf einen Massenpunkt der Masse m mit Abstand r vom Galaxiezentrum die Kraft

$$F = \frac{4}{3}\pi G m \rho\, r, \qquad \text{für } r \leqslant R$$

und

$$F = \frac{4}{3}\pi G m \rho R^3 \, \frac{1}{r^2}$$

sonst. Die Geschwindigkeit der Bewegung lasst sich einfach ermitteln aus der Bedingung, dass die Gravitationskraft durch die zentrifugale "Kraft", $F_z = mv^2/r$, ausgeglichen werden muss. Wir erhalten

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G m \rho} \cdot r, \qquad \text{für } r \leqslant R,$$

und

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G m \rho R^3}\, \frac{1}{\sqrt{r}} \qquad \text{für } r > R.$$

17 Aufgabe

Wir nehmen an, dass es sich um einen Massenpunkt der Masse μ im zentralpotential $U(r)$ handelt. Der Drehimpuls ℓ ist erhalten:

$$\ell = \dot{\varphi}\mu r^2, \qquad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{\ell}{m r^2},$$

und die Energie auch:

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^4}(r'^2 + r^2) + U(r),$$

wobei $r' = dr/d\varphi$. Wir erhalten

$$\pm\frac{\ell}{r^2\sqrt{2\mu}}\,\frac{dr}{\sqrt{E-[U(r)+\ell^2/2\mu r^2]}} = d\varphi.$$

Mit $U_{\text{eff},\ell}(r) = U(r)+\ell^2/2\mu r^2$ ist Teil (a) gezeigt, wenn man die oben gegebebe Gleichung von r_{min} bis r_{max} integriert. Der Faktor 2 ergibt sich daraus, dass die volle Periode von r, $r_{min} \to r_{max} \to r_{min}$ berücksichtigt werden muss.

Teil (b): Zu berechnen ist

$$\Delta\varphi = \frac{2\ell}{s\sqrt{2\mu}}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{s\,dr}{r^2\sqrt{E-(A/r+s^2/r^2)}},$$

wobei $B+\ell/2\mu = s^2$. Wir führen ein $u = 1/r$ und a, so dass $2as = A$ und erhalten

$$\Delta\varphi = -\frac{2\ell}{s\sqrt{2\mu}}\int_{u_{max}}^{u_{min}} \frac{s\,du}{\sqrt{E-a^2-(-a+su)^2}},$$

Es sei $x = su-a$. Den r_{min} und r_{max} (d.h. $r'=0$) ensprechen die Lösungen der Gleichung

$$(su-a)^2+a^2-E = 0,$$

also

$$x_\pm = \pm\sqrt{E-a^2}.$$

Damit gilt

$$\Delta\varphi = -\frac{2\ell}{s\sqrt{2\mu}}\int_{x_+}^{x_-}\frac{dx}{\sqrt{(E-a^2)-x^2}} = 2\pi\frac{\ell}{\sqrt{2\mu}}\cdot\frac{1}{\sqrt{B+\ell^2/2\mu}}.$$

Insbesondere sind die Bahnkurven für $B=0$ geschlossen.

18 Aufgabe

Wir führen die Bezeichnungen ein $t = T_{(1)}$, $t' = T'_{(1)}$, $T = T'_{(2)}$, $\cos\varphi = \delta$ (wobei φ den Streuwinkel von K_2 bezeichnet), $m = m_{(1)}$, $M = m_{(2)}$. Es ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} t &= t' + T \\ \sqrt{2mt} &= \sqrt{2mt'}\,\gamma + \sqrt{2MT}\,\delta \\ 0 &= \sqrt{2mt'}\,\sqrt{1-\gamma^2} - \sqrt{2MT}\,\sqrt{1-\delta^2}, \end{aligned}$$

wegen $\sqrt{2mt} = mv_{(1)}$, (und enstprechend für die Impulse nach dem Stoß). Aus den letzten zwei Gleichungen folgt

$$T = (1-2\gamma\sqrt{x}+x)\cdot\alpha\cdot t,$$

wobei $x = t'/t$ und $\alpha = m/M$. Setzt man dieses Ergebnis in $t = t' + T$ ein, so ergibt sich

$$\sqrt{x} = \frac{\gamma\alpha \pm \sqrt{\gamma^2\alpha^2 + 1 - \alpha^2}}{\alpha + 1},$$

wobei für $m \leqslant M$, d.h. $1 - \alpha^2 \geqslant 0$, nur das "+" Vorzeichen zugelassen ist (sonst ist $\sqrt{x} < 0$). Es folgt

$$x = \frac{2\gamma^2\alpha^2 + 1 - \alpha^2 \pm 2\gamma\alpha\sqrt{\gamma^2\alpha^2 + 1 - \alpha^2}}{(1+\alpha)^2}.$$

Teil (b) Für zentrale Stöße ($\theta = \pi$) ergibt sich

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2,$$

insbesondere $t'/t = (11/13)^2$ für das Graphit und $t'/t = (1/3)^3$ für das Deuterium. Wir berechnen leicht, dass für das Graphit sind $N_G \approx 54$ und für das Deuterium $N_D \approx 8$ zentrale, elastische Stöße erforderlich sind.