UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 5

Musterlösungen

13 Aufgabe

Für die Lösungen des Keplerproblems existieren zwei erhaltene Grössen: die Energie und der Drehimpuls. Beim Perizentrum/Apozentrum (wo die radiale Geschwindigkeit verschwindet) gilt

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{A}{r}.$$
$$\ell = v \cdot r,$$

wobei $\mathcal{E} = E/m$, $\ell = L/m$, und $A = GM = 3.9 \cdot 10^{20}\,\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{s}^2}$. Wir finden

$$r_\pm = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 2\mathcal{E}\ell^2}}{2\mathcal{E}}$$

sodass

$$\mathcal{E} = -\frac{A}{r_+ + r_-},$$
$$\ell^2 = -2\mathcal{E} r_+ r_-,$$

Die Abstände r_+ und r_- sind gegeben: $r_- = 6.47 \cdot 10^8$cm, und $r_+ = 7.37 \cdot 10^8$cm. Wir finden

$$\mathcal{E} = -2.82 \cdot 10^{11}, \qquad v_1 = 8 \cdot 10^5.$$

Nach dem Stoß ist

$$v = \frac{9}{11} v_1,$$

und das Objekt hat immer noch keine radiale Geschwindigkeit. Wir kennen also die Geschwindigkeit (v) und den Abstand, $R_+ = r_-$. Daraus berechnen wir

$$\mathcal{E}' = -3.88 \cdot 10^{11} < \mathcal{E},$$
$$\ell' = 4.24 \cdot 10^{14},$$

und damit

$$R_- = 3.58 \cdot 10^8,$$
$$R_+ = 6.47 \cdot 10^8.$$

Der Abstand R_- ist kleiner als der Erdradius ($6.37 \cdot 10^8$cm) und deshalb muss das Objekt auf die Erde stürzen.

14 Aufgabe

Wir betrachten nur die Gravitationskraft die von einer Sphäre ausgeübt wird. Unserer Beobachter legen wir bei $P = (r, 0, 0)$ (s. Abb. 1). Aus Symetriegrunden muss die Kraft entlang der x-Achse ausgerichtet werden; wir berechnen deshalb nur die x-Komponente der Kraft.

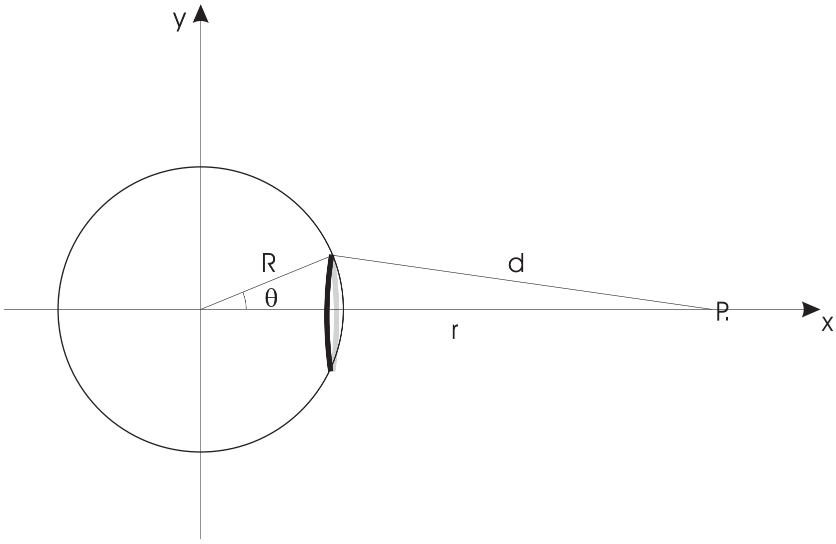

Abb.1. Die Geometrie zur Aufgabe 14.

Der Beitrag des Stücks der Sphäre zwischen θ und $\theta + d\theta$ ist:

$$dF_x = \frac{A\,dm}{d^2} \cdot \frac{r - R\cos\theta}{d},$$

wobei $A = GM$ (M =Masse des Punktes P), $d^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta$, und

$$dm = 2\pi\varrho \sin\theta\, d\theta, \qquad \varrho = M_S/4\pi,$$

(M_S =Masse der Sphäre). Die Gesamtkraft ist durch ein Integral

$$F_x = \frac{\pi\varrho A}{r} \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \left[\frac{1}{d} + (r^2 - R^2) \cdot \frac{1}{d^3}\right]$$

gegeben. Nun

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, \frac{1}{d} = \frac{1}{rR}\big(|r+R| - |r-R|\big), \qquad \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, \frac{1}{d^3} = \frac{1}{rR}\left(\frac{1}{|r-R|} - \frac{1}{|r+R|}\right)$$

(man beachte, dass diese Integrale sehr einfach berechenbar nur wegen dem $\sin\theta$-Faktor sind; für eine gravitative Kraft eines Rings, z.B., gibt es ihm nicht, und im solchen Fall ergeben sich elliptische Integrale.) Insgesamt finden wir

$$F_x = \frac{GMM_S}{r^2}, \qquad \text{für } r > R$$

und

$$F_x = 0, \qquad \text{für } r < R.$$

Damit wirkt eine Sphäre wie ein Massenpunkt wenn P außerhalb der Sphäre liegt. Anderseits innerhalb der Sphäre verschwindet das Gravitationsfeld.

15 Aufgabe

Ohne Begrenzung der Allgemeinheit darf man annehmen, dass es sich um ein Zwei-Tielchen-System handelt. Wir bezeichnen mit m und M die Massen und mit $\vec{x}$ und $\vec{y}$ die Bahnkurven. Es sei die Newtonsche Gleichungsystem

$$\begin{aligned} m\ddot{x}^j &= f(|\vec{x}-\vec{y}|)\,(x^j - y^j), \\ M\ddot{y}^j &= -f(|\vec{x}-\vec{y}|)\,(x^j - y^j), \end{aligned}$$

mit $G1$ bezeichnet, und

$$\begin{aligned} m\ddot{X}^i &= f(|\vec{X}-\vec{Y}|)\,(X^i - Y^i), \\ M\ddot{Y}^i &= -f(|\vec{X}-\vec{Y}|)\,(X^i - Y^i), \end{aligned}$$

mit $G2$ (mit einer beliebigen Funktion f). Die Aufgabe hat zwei Teile ($\Leftarrow$ und $\Rightarrow$).
Teil ($\Leftarrow$): Hier muss gezeigt werden, dass wenn $\{\vec{X}, \vec{Y}\}$ durch eine Galileitransformation von $\{\vec{x}, \vec{y}\}$,

$$\begin{aligned} X^i &= D^i_j x^j + v^i t + k^i, \\ Y^i &= D^i_j y^j + v^i t + k^i, \end{aligned}$$

entstehen (mit konstanten Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{k}$, und einer Drehmatrix D^i_j), dann folgt aus $G1$ die Gleichungsystem $G2$. Das ist aber einfach zu zeigen: führen wir eine (zeitunabhängige) Drehung mit D^i_j, so folgt aus $G1$:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{X}^i &= f(|\vec{x}-\vec{y}|)\,(X^i - Y^i),\\
M\ddot{Y}^i &= -f(|\vec{x}-\vec{y}|)\,(X^i - Y^i),
\end{aligned}
$$

(wegen $\ddot{X}^i = D^i_j \ddot{x}^j$). Nun $|\vec{x}-\vec{y}| = |\vec{X}-\vec{Y}|$ so dass wir das Gleichungssystem $G2$ erhalten haben.
Teil (⇒): Hier muss gezeigt werden, dass wenn $G1$ und $G2$ gleichzeitig gültig sind, dann

$$
\begin{aligned}
X^i &= D^i_j x^j + v^i t + k^i,\\
Y^i &= D^i_j y^j + v^i t + k^i.
\end{aligned}
$$

Diese Tatsache muss folgen *zumindest* für $f = 0$ (beide Bezugsysteme sind per Annahme inertial, d.h. im kräftefreien Fall die Bahnkurven Geraden sind) und für eine andere festgelegte, aber beliebige, Funktion f. Es sei $X^i = g^i(t, \vec{x})$. Dann, für $f = 0$, aus

$$
\ddot{x}^i = 0, \qquad \ddot{X}^i = 0,
$$

folgt

$$
\frac{\partial^2 g^i}{\partial^2 t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 g^i}{\partial t \partial x^j} = 0, \qquad \frac{\partial^2 g^i}{\partial x^j \partial x^k} = 0
$$

(weil $\dot{x}^i$ beliebig sind). Somit ist

$$
g^i = W^i_j x^j + v^j t,
$$

und für eine feste f aus $G2$ folgt:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}^i &= f(|\vec{X}-\vec{Y}|)\,(x^i - y^i),\\
M\ddot{y}^i &= -f(|\vec{X}-\vec{Y}|)\,(x^i - y^i).
\end{aligned}
$$

was mit

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}^i &= f(|\vec{x}-\vec{y}|)\,(x^i - y^i),\\
M\ddot{y}^i &= -f(|\vec{x}-\vec{y}|)\,(x^i - y^i),
\end{aligned}
$$

vergliechen werden muss. Es gilt: entweder ist f konstant, oder muss $|W\vec{d}| = |\vec{d}|$ für alle $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$, d.h. die Matrix W eine Drehmatrix (oder eine Spieglung) sein muss.

Wir schließen, dass entweder es eine Galileitransformation zwischen $\{\vec{X}, \vec{Y}\}$ und $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ gibt, oder es sich um harmonische Kräfte handelt (in diesem Fall sind noch, z.B., reskalierungen von den Koordinaten (keine Galilei-Transformationen) zugelassen).