UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Theoretische Mechanik

Übungsblatt 4

Musterlösungen

10 Aufgabe

Teil (a) Es gilt offensichtlich

$$V(x) = -F_0\beta \sin^2(x/\beta),$$

wobei $\beta = 2/k$ (und $\sin^2(x/2) = \frac{1}{2}[1-\cos(x)]$). Wegen

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} + F_0\beta\sin^2(x/\beta)}$$

ist $\dot{x}$ für $E > 0$ immer positiv/negativ und deshalb kann sich das Teilchen ins Unendliche entfernen. Für $E < 0$ existieren immer Gebiete, wo $\frac{2E}{m} + F_0\beta\sin^2(x/\beta) < 0$ ist, d.h. wo das Teilchen sich nicht befinden darf. Der Term $F_0\beta\sin^2(x/\beta)$ ist periodisch, und damit für einen beliebigen Anfangsort x_0 gibt es solche verbotene Gebiete auf beiden Seiten von x_0. Wir schließen daraus, dass für $E < 0$ die Bewegung räumlich begrenzt sein muss.

Teil (b) Aus der Teil (a) sieht man sofort, dass die mögliche Lösungen mit der gefragten Eigenschaft $E = 0$ Lösungen sein müssen (sonst liegt $x = 0$ im verbotenen Interval). Aus $E = 0$ folgt die DGL:

$$\frac{du}{\sin u} = \pm t \cdot \sqrt{\frac{2F_0}{m\beta}},$$

wobei $u = x/\beta$. Wegen $\int \frac{1}{\sin(u)} = \ln\tan(u/2)$ ergibt sich

$$x = 2\beta\arctan\left[e^{\pm\sqrt{\frac{2F_0}{m\beta}}(t+t_0)}\right].$$

Die (+) Lösungen beschreiben eine Bewegung mit $x \to 0$ für $t \to -\infty$ und $x \to 2\pi/\beta$ für $x \to +\infty$. Zu beachten ist, dass die Maxima von $V(x)$ gerade bei $n \cdot 2\pi/k$ mit $n \in \mathbb{Z}$ liegen.

Teil (c) Für $E > 0$ finden wir allgemein

$$\frac{du}{\sqrt{\kappa + \sin^2 u}} = \pm t \cdot \sqrt{F_0/\beta},$$

wobei $u = x/\beta$ und $\kappa = \frac{2E}{mF_0\beta}$. Nun für $\kappa \ll 1$ wegen

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa + \sin^2 u}} \approx \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \left(1 - \frac{1}{2\kappa} \sin^2 u\right)$$

gilt

$$u - \frac{u}{4\kappa} + \frac{\sin(2u)}{8\kappa} = \pm t \cdot \sqrt{\frac{2E}{m\beta}}.$$

Diese Relation ist nicht explizit umkehrbar und damit gibt es keine geschlossene Formel für $x(t)$. Wir haben in der oberen Lösung die Konstante t_0 so gewählt, dass für $t = 0$ ist auch $x = 0$.

11 Aufgabe

Mit der Definition der Arbeit

$$A(x_a, x_b) = \int_{x_a}^{x_b} F_i(\vec{x}) \cdot dx^i = \int_{t_a}^{t_b} F_i[\vec{x}(t)] \cdot \dot{x}^i(t)\, dt$$

wir finden sofort im Teil (a):

$$A(t_2, t_1) = \left\{ -\frac{a}{b} \cos(bt) + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} \right\} \Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

Im Teil (b) ist

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \pm R \cos t, \\ \dot{x}_2 &= -R \sin t, \\ \dot{x}_3 &= R \tan \alpha \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm R \sin t, \\ x_2 &= R \cos t, \\ x_3 &= R\, t\, \tan \alpha \end{aligned}$$

Unsere Kurve lauft von $t = 0$ bis $t = 4\pi$. Wir erhalten

$$A(0, 4\pi) = R^2 \tan(\alpha) \left[4\pi a + b \tan \alpha \, \frac{(4\pi)^2}{2} \right].$$

12 Aufgabe

Die Felder (b) und (f) sind keine konservative Vektorfelder, da sie die notwendige Bedingung $\partial_i V_k = \partial_k V_i$ ist nicht erfüllen. Sonstige Vektorfelder sind konservativ; die entsprechende Potentiale sind:

$$\text{(a):} \quad \varphi = \frac{1}{r} \qquad\qquad \text{(c):} \quad \varphi = -\frac{x_3}{r^3}$$
$$\text{(d):} \quad \varphi = -x_3 \qquad\qquad \text{(e):} \quad \varphi = \arctan(x_2/x_1),$$

sodass $\vec{V} = -\vec{\nabla}\varphi$. Zu beachten ist, dass eine Linearkombination der Felder (d) und (c), etwa $\vec{V} = \vec{V}_{(c)} + 2\vec{V}_{(d)}$ die Neumannsche Randbedingung auf einer Sphäre bei $r = 1$, $\vec{e}_r \cdot \vec{V} = 0$ erfüllt. So ein $\vec{V}$ beschreibt das (wirbelfreie) Geschwindigkeitsfeld (Potentialströmung) einer Flüssigkeit die um eine Sphäre strömt und asymptotisch homogen, $\vec{V} \approx \vec{e}_z$, ist.

Das Feld (e) beschreibt das Geschwindigkeitsfeld eines Potentialwirbels, d.h. z.B. eines Wirbels im Superfluid; dagegen beschreibt (f) das Geschwindigkeitsfeld der Atomen eines rotierenden Festkörpers.