UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Theoretische Mechanik

Übungsblatt 2
Musterlösungen

7 Aufgabe

Teil (a) Die Kraft lässt sich als

$$F^i = -\partial^i(\tfrac{1}{2}k\,r^2)$$

schreiben (wobei $r^2 = x^2+y^2+z^2$), d.h. $V = \frac{1}{2}kr^2$ das Potenzial dieser Kraft ist. Die Gesamtenergie ist eine Summe des kinetischen und potenzielen Teils:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + V.$$

Die Zeitableitung von E verschwindet,

$$\dot{E} = m\dot{x}_i\ddot{x}^i + kx_i\dot{x}^i = 0,$$

auf Grund der Bewegungsgleichung $F^i = m\ddot{x}^i$. Das Gleiche passiert für den Drehimpuls

$$J^i = \epsilon^{ijk}x_j(m\dot{x}_k)$$

weil

$$\dot{J}^i = 0 + \epsilon^{ijk}x_j(m\ddot{x}_k) = 0,$$

($\ddot{x}_k$ ist proportional zu x_k).

Teil (b) Die Bahn liegt in einer festen Ebene, wenn es einen zeitunabhängigen Vektor $\vec{w}$ gibt, so dass $\vec{r}(t)$ senkrecht zu $\vec{w}$ für alle t ist. Offensichtlich hat $w^i = J^i$ diese Eigenschaft (s. Teil a). Die Fläche des Dreiecks zwischen zweien Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$ ist gleich $F = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{w}|$. Für eine Bahnkurve ergibt sich infinitesimal:

$$\Delta F = \tfrac{1}{2}|\vec{r}(t)\times[\vec{r}(t)+\Delta\vec{r}(t)]| = \tfrac{1}{2}|\vec{r}(t)\times\Delta\vec{r}(t)|,$$

d.h.

$$\frac{dF}{dt} = \tfrac{1}{2}\left|\vec{r}(t)\times\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = \frac{|\vec{J}|}{2m} = const.$$

Teil (c) Wir nehmen an, dass es bekannt ist, dass eine Reskalierung einer Ellipse (bzgl. beliebiger

Achse) wider eine Ellipse beschreibt[1]. Mit Hilfe von Reskalierungen und Zeit-Translationen lässt sich die Bahnkurve zu

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t + \alpha)$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - \alpha)$$

vereinfachen ($\omega = 1$ wird angenommen). In anderen Worten, die Bahnkurve dann und nur dann eine Ellipse beschreibt, wenn die oben gegebene Bahnkurve es tut. Der größte Abstand vom Zentrum wird bei $t = 0$ oder $t = \pi$ erreicht, d.h. dann wenn der Winkel zwichen $\vec{r}$ und die x-Achse gleich $\arctan(\cos(\alpha)/\cos(-a)) = \pi/4$ ist. Wir drehen deshalb die Bahnkurve um $\pi/4$ und wegen

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B),$$
$$-2 \sin A \sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B),$$

erhalten

$$x' = \cos(t)[\cos \alpha]$$
$$y' = \sin(t)[- \sin \alpha],$$

was offensichtlich eine Ellipse beschreibt.

Teil (d) Die Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $y(t)$ sind identisch:

$$\ddot{x}^i = -\omega^2 x^i,$$

wobei $\omega^2 = k/m$. Wir finden die allgemeine Lösung mit sechs beliebigen Konstanten:

$$x^i = A^i \cos(\omega t + \alpha_i),$$

wobei A^i die (drei unabhängige) Amplituden und α_i die (drei unabhängige) Phasen bezeichnen. Offensichtlich die Perioden der Bewegung (Umlafuzeiten), $T = 2\pi/\omega$, in allen Richtungen gleich sind.

Teil (e) Aus

$$E = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} k r^2 = const$$

folgt unmittelbar, das die Geschwindigkeit v wird maximal wenn r minimal wird.

8 Aufgabe

In dieser Aufgabe wird angenommen, dass der Drehimpuls durch

$$J^i = \epsilon^{ijk} x_j (m \dot{x}_k)$$

[1]Def. einer Ellipse: Menge aller Punkte mit $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ mit $B^2 \leq 4AC$.

gegeben ist[2]. Aus $\dot{J} = 0$ folgt

$$\vec{x} \times \ddot{\vec{x}} = 0,$$

und deshalb muss $\ddot{\vec{x}}$ parallel zu $\vec{x}$ sein. Aus der Newtonschen Bewegungsgleichung folgt, dass

$$\vec{F} = f(\vec{x}) \cdot \vec{x},$$

d.h. die Kraft muss immer radial gerichtet sein, aber darf am jeden Punkt andere "Stärke" haben. Auf das Teilchen werden damit nur radiale Beschleunigungen ausgeübt, und sie bewegt sich nur "radial", d.h.

$$\vec{x}(t) = g(t) \cdot \vec{x}_0,$$

wobei $\vec{x}_0 = \vec{x}(t)|_{t=0}$ und die (möglicherweise beschränkte) Funktion $g(t)$ von der konkreten Form des Krafts noch abhängt.

9 Aufgabe

In dieser Aufgabe hilft die axiale Symmetrie des Problems sehr. Wir nehmen an, dass die Sonne auf der $z-$Achse liegt, $\vec{S} = (0, 0, R)$, und betrachten die Schwerkraft die auf einen System (in der x-y Ebene) das aus zwei Massenelemente der gleichen Masse m besteht: ein bei $\vec{x}_1 = (r, 0, 0)$ und das andere bei $\vec{x}_2 = -\vec{x}_1$. Der Gesamtdrehmoment ist gegeben durch

$$\vec{T} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2 = \alpha[\vec{x}_1 \times (\vec{S} - \vec{x}_1)] + \alpha[\vec{x}_2 \times (\vec{S} - \vec{x}_2)] = \alpha(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times \vec{S},$$

wobei $\alpha = GMm/\varrho^3$ und $\varrho = |\vec{S} - \vec{x}_1| = |\vec{S} - \vec{x}_2|$. Wegen $\vec{x}_2 = -\vec{x}_1$ verschwindet $\vec{T}$. Das Gleiche gilt offensichtlich auch für alle Systeme die aus solchen "konjugierten" Massenelementen bestehen, insbesondere, für alle axialsymmetrische (und kugelsymmetrische) Massenverteilungen.

[2]Allgemein beschreibt J die erhaltene Göße die man aus der Isotropie des Raums herleitet. Für geschwindigkeits-abhängige Lagrange-Funktionen (z.B. für Teilchen in Magnetfälder) ergibt sich für J eine andere Formel (s. Aufgabe 6). Dann aber sind die mögliche Bahnkurven viel zu reich (betrachte, z.B. ein Teilchen in $x - y$ ebene in einem radialen elektrischen Feld und konstanten zu der Ebene senkrechten Magnetfeld).