

UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 2
Musterlösungen

4 Aufgabe

Wir betrachten nur die Planetenbahn, da die Geschwindigkeits- und die Beschleunigungs-Vektoren für die Ellipse *formal* im Limit $e \rightarrow 0$ gewonnen werden können (sonst ist $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$). Wir schreiben

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

mit $f = a[\cos(\varphi) - e]$ und $g = b \sin(\varphi)$. Dann ist

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} \dot{\varphi},$$

und

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} f'' \\ g'' \end{pmatrix} (\dot{\varphi})^2 + \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} \ddot{\varphi},$$

mit

$$\begin{aligned} f' &= -a \sin \varphi, & g' &= a \cos \varphi, \\ f'' &= -a \cos \varphi, & g'' &= -a \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= (1 - e \cos \varphi)^{-1} & \ddot{\varphi} &= -e \sin \varphi \cdot (1 - e \cos \varphi)^{-3}. \end{aligned}$$

(die letzte Zeile folgt unmittelbar aus $\varphi - e \sin \varphi = t$.) Das Einsetzen dieser Relationen in die Gleichung für $\ddot{\vec{r}}$ führt auf

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} a[e \sin^2 \varphi - \cos \varphi + e \cos^2 \varphi] \\ b[-e \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi + e \cos \varphi \sin \varphi] \end{pmatrix}.$$

Wir haben damit bewiesen, dass

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{(1 - e \cos \varphi)^3} \vec{r}.$$

Da die Planetenbahn (Ellipse) seine Brennpunkte bei $x = 0, y = 0$ oder $x = -2ea, y = 0$ hat, erhalten wir dass die Beschleunigung immer auf dem ersten Brennpunkt zeigt. Zusätzlich gilt

$$\|\vec{r}\| = a(1 - e \cos \varphi),$$

und damit

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = -\frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r},$$

mit $\tau^2 = t^2/a^3$. Der Planet wird also durch die Gravitationskraft der Stärke $1/r^2$ angezogen.

5 Aufgabe

Die Anfangsbedingung sowie die Bewegungsgleichung führen dazu, dass das Hagelkorn sich nur in der vertikalen Richtung (x) bewegt. Mit der Bezeichnung $\dot{x} = u$ die Bewegungsgleichung lautet

$$\dot{u} = -\alpha u^2 + g,$$

wobei $\alpha = \frac{3}{16R} \frac{\rho_{\text{Luft}}}{\rho_{\text{Eis}}} \approx 0.25 \frac{1}{R} \cdot 10^{-3}$. Diese Gleichung lässt sich einfach lösen; mit der Anfangsbedingung $u(0) = 0$ erhalten wir

$$\dot{x} = \beta \tanh[\alpha\beta t],$$

wobei $\beta = \sqrt{g/\alpha} \approx 2 \cdot 10^3$. Die Geschwindigkeit wächst zunächst linear an (freier Fall) und stabilisiert sich schnell (auf der Zeit-Skala von $\alpha\beta t \sim 1$ d.h. $t > 5\text{sek}$) auf $\dot{x}_{\text{asympt}} = \beta = 72 \text{ km/h}$. Für $x(t)$ finden wir durch eine einfache Integration

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln[\cosh[\alpha\beta t]] \approx \beta t - \frac{1}{\alpha} [\ln 2 - \exp(-2\alpha\beta t)]$$

Für die Strecke von 1km wird $t \gg 5\text{sek}$ und die letzten zwei Terme dürfen vernachlässigt werden. Somit erhalten wir die Zeit des Falls:

$$t \approx 50\text{sek}.$$

Die asymptotische Geschwindigkeit hängt als \sqrt{R} von der Radius des Hagelkorns ab. Die Größe (Zeit-Skala) $\alpha\beta$ skaliert sich als $1/\sqrt{R}$.

6 Aufgabe

Die Bewegungsgleichungen sind

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \dot{y} \cdot qB \\ \ddot{y} &= -\dot{x} \cdot qB.\end{aligned}$$

Im Fall des konstanten B -Feldes lassen sich diese Gleichungen einfach integrieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned}x &= \frac{u}{\omega} \sin(\omega t + c) + x_0 \\y &= -\frac{u}{\omega} \cos(\omega t + c) + y_0,\end{aligned}$$

wobei $\omega = qB/m$ die (von der Amplitude der Bewegung unabhängige) Zyklotronfrequenz bezeichnet. Die Lösung enthielt vier Konstanten der Integration (wie es für zwei DGL zweiter Ordnung sein muss): u - die Geschwindigkeit des Teilchens, (x_0, y_0) die Anfangsposition und c die Konstante die ursprüngliche Richtung der Geschwindigkeit festlegt.

Im Fall des Orts-abhängigen Magnetfeldes, $B_z = -\alpha/r$, $\alpha = qBR_0/m$ es ist leicht zu zeigen, dass die Geschwindigkeit u und der *verallgemeinerte* Drehimpuls J , definiert durch

$$\begin{aligned}u^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \\J &= xy - y\dot{x} - \alpha r,\end{aligned}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ konstant sind. Es lohnt sich die Polarkoordinaten einzuführen. In diesen, sind die Bewegungsgleichungen durch

$$\begin{aligned}u^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \\J &= r^2\dot{\varphi} - \alpha r\end{aligned}$$

gegeben. Im Fall $J = 0$ Lösungen existieren nur wenn $u^2 > \alpha^2$. Mit $v = \sqrt{u^2 - \alpha^2}$ finden wir

$$r = r_0 \pm vt$$

und

$$\varphi = \varphi_0 \pm \alpha \ln[r_0 \pm vt].$$

Die Bahnkurven beschreiben logarithmische Spiralen:

$$\varphi = \varphi_0 - \ln r.$$

(Aus einem Anfangspunkt r_0 kann das Teilchen sich entweder nach $r = 0$ oder nach $r \rightarrow \infty$ bewegen.)

6.1 Allgemeine J

Wir setzen $\alpha = 1$ zur Vereinfachung der Notation. In den Bewegungsgleichungen lässt sich φ vollständig eliminieren sodass nur die Gleichung

$$\dot{r} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{r^2 u^2 - (J + r)}$$

zu lösen bleibt. Man kann diese integrieren, nun die Lösung ist undurchsichtig. Andererseits, kann die Gleichung auch zu

$$\ddot{r} = (J/r + 1)J/r^2$$

umgeformt werden. Für $\mathbf{J} > 0$ wirkt auf das Teilchen eine rein-abstößende Kraft. Wenn, ursprünglich, $\dot{r} < 0$ dann erreicht das Teilchen den Punkt

$$r = \frac{J}{|u| - 1}$$

an dem $\dot{r} = 0$ und entfernt sich danach ins Unendliche. (Die Lösungen existieren nur für $u^2 > 1$.)

Für $\mathbf{J} < 0$ eine Analyse der Kraft zeigt, dass es einem Potential gibt, sodass

$$\ddot{r} = -\partial_r V(r).$$

Für $J < 0$ hat das Potential, $V(r) = (J/r + 1)^2/2$, ein Minimum bei $r = -J/\alpha$, wird ∞ bei $r = 0$ und konvergiert gegen 1 für $r \rightarrow \infty$. Für $|u| > 1$ gibt es also Lösungen mit etwa ähnlichen Bahnkurven wie bei $J > 0$. Nun für $|u| < 1$ existiert eine Familie von oszillierenden Lösungen, die für Immer in der Umgebung von $r = 0$ bleiben. Man kann auch leicht zeigen, dass die Winkelgeschwindigkeit, $r\dot{\phi}$, positiv an den Maxima und negativ an den Minima von $r(t)$ ist. Damit kreist das Teilchen nicht nur um $r = 0$ sondern ist die Bahnkurve durch eine verlängerte Zykloide beschrieben (s. Abbildung).

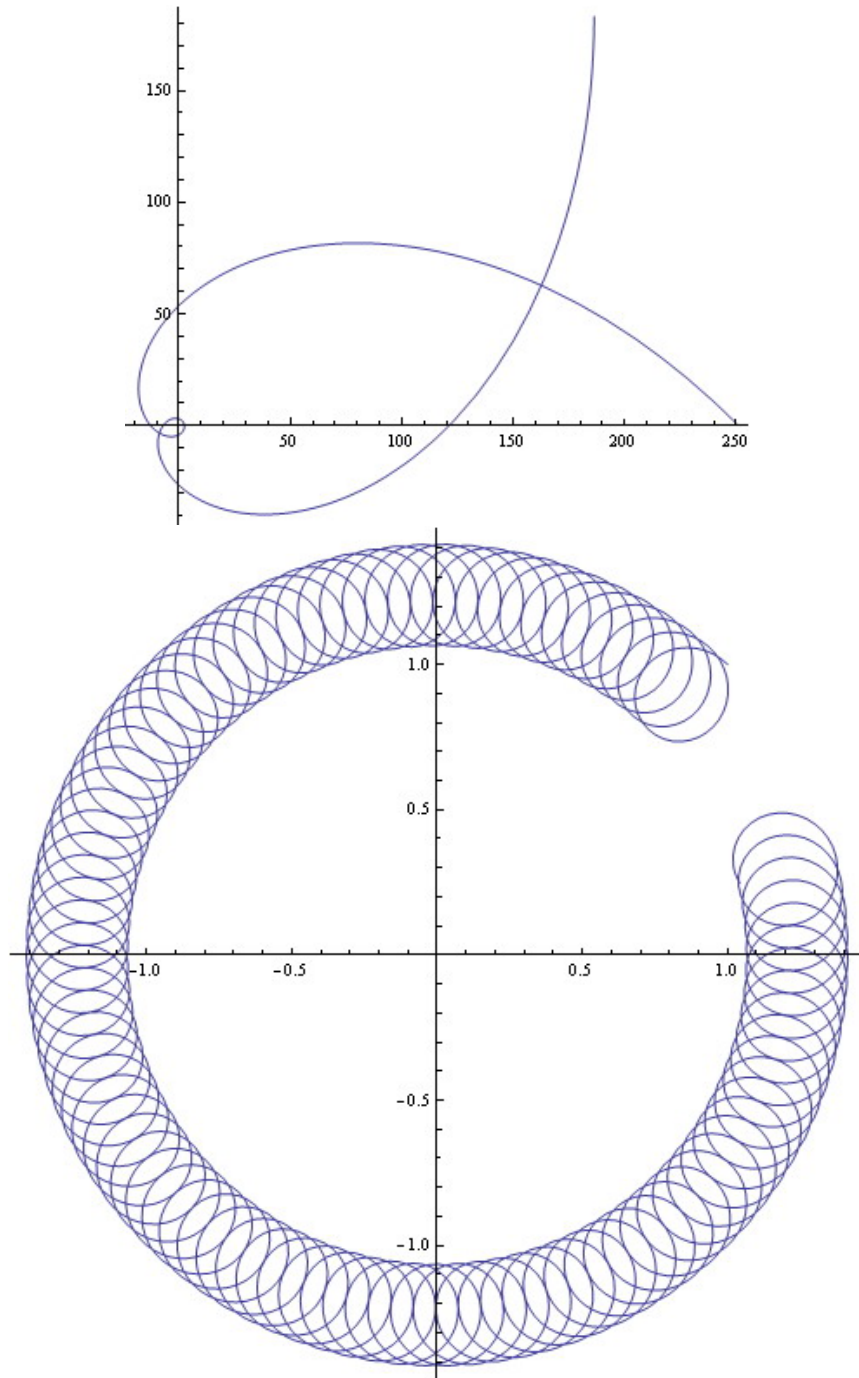


Abbildung 1: Die $J < 0$ räumliche Bahnkurve für $|u| > 1$ (oben) und $|u| < 0$ (unten).