UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 14

Musterlösungen

43 Aufgabe

𝔚ir führen die Bezeichnung

$$J(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathcal{G}(t,s) f(s) ds$$

ein, und berechnen die Ableitungen $\partial_t J(t)$ und $\partial_2^2 J(t)$. Das Ergebnis wird verwendet zur Auswertung des Ausdruckes:

$$\ddot{J} + 2\rho \dot{J} + \omega_0^2 J$$

mit $\Omega^2 = \omega_0^2 - \rho^2$. Wir finden nur einen Term ohne des $\int_{-\infty}^{t}$ Integrals. Die Glieder mit dem Integral kompensieren sich vollständig, sodass

$$\ddot{J} + 2\rho \dot{J} + \omega_0^2 J = f(t),$$

d.h. die angegebene Funktion tatsächlich der Greenschen-Funktion des Operators $\partial_t^2 + 2\rho\partial_t + \omega_0^2$ gleich ist.

ℑm Spezialfall $f(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ finden wir

$$y_f(t) = \frac{F_0\, e^{-\alpha t}}{\Omega^2 + (\alpha - \rho)^2} \left\{ 1 + e^{(\alpha-\rho)t} \left[\frac{\alpha - \rho}{\Omega} \sin(\Omega t) - \cos(\Omega t) \right] \right\}.$$

Für $\alpha \to 0$ erhalten wir

$$y_{f,\alpha=0}(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2} \left\{ 1 - e^{-\rho t} \left[\frac{\rho}{\Omega} \sin(\Omega t) + \cos(\Omega t) \right] \right\}$$

d.h. asymptotisch wird die Gleichgewichtslage um F_0/ω_0^2 verschoben (die äußere Kraft ist für $t > 0$ zeitunabhängig). Anderseits, bleibt die Gleichgewichtslage für $\alpha \to \rho$ (und auch alle andere $\alpha > 0$) unverändert:

$$y_{f,\alpha=\rho}(t) = \frac{F_0 e^{-\rho t}}{\Omega^2} \left\{ 1 - \cos(\Omega t) \right\}.$$

44 Aufgabe

𝔇ie Lagrange-Funktion des Systems ist

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{D}{2}\sum_i (R_i - \sqrt{2})^2,$$

wobei

$$R_i = \sqrt{(X - X_0^i)^2 + (Y - Y_0^i)^2}, \qquad i = 1, 2, 3$$

sind die momentane Längen der Federn, d.h. die Abstände zwischen den Punkten (X, Y) und (X_0^i, Y_0^i). Wir drehen das System um $\pi/4$ im negativen Richtung und führen eine Skalierung $X = \sqrt{2}x$, $Y = \sqrt{2}y$ ein, sodass jetzt die Federn an den Punkten $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ befestigt sind. Das Potential vereinfacht sich zu

$$V = D\sum_i (r_i - 1)^2,$$

mit

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\ r_{2/3} &= \sqrt{(x \mp 1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

An den Gleichgewichtspunkten müssen die ersten partiellen Ableitungen des Potentials (also: die Kräfte) verschwinden. Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (r_1 - 1)\frac{x}{r_1} + (r_2 - 1)\frac{x-1}{r_2} + (r_3 - 1)\frac{x+1}{r_3} &= 0, \\ (r_1 - 1)\frac{y-1}{r_1} + (r_2 - 1)\frac{y}{r_2} + (r_3 - 1)\frac{y}{r_3} &= 0. \end{aligned}$$

Es ist nicht einfach diese Gleichungen im allgemeinen Fall zu lösen. Natürlich alle Lösungen mussen symmetrisch um die y-Achse liegen. Die Kräfte in der $x-$Richtung verschwinden auf der y-Achse (erste Gl. ist erfüllt), und eine numerische Untersuchung (s. Abb. 1) deutet darauf hit, dass es keine Ruhelagen weg von der y-Achse gibt.

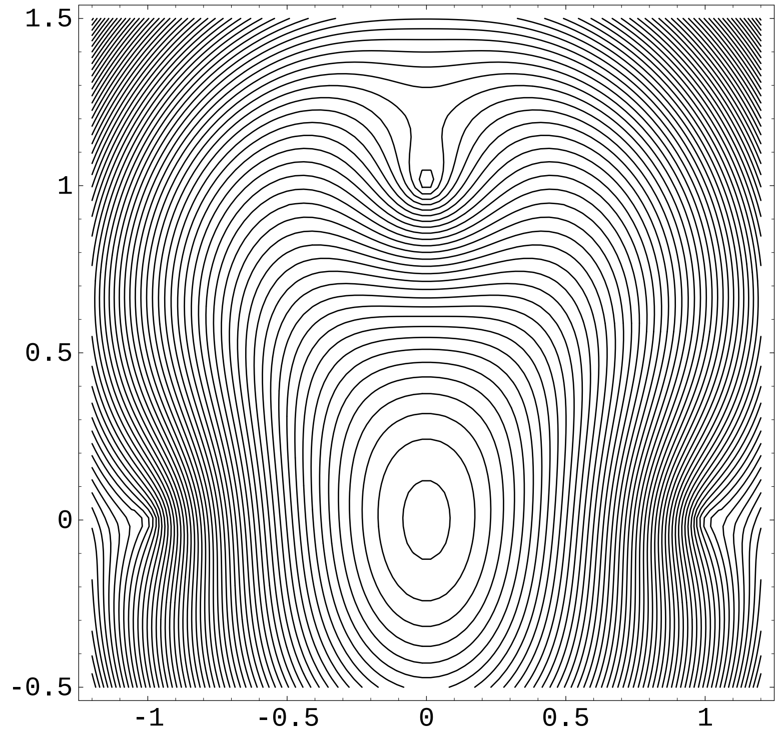

Abbildung 1. Äquipotentialflächen zur Aufgabe 44.

𝔄n der y-Achse (d.h. $x = 0$) gibt es zwei Ruhelagen: eine (offensichtliche) bei $y = 0$ und eine bei $y \approx 1.17$ (die reelle Lösung der Gleichung $3y - 2 = 2y/\sqrt{1+y^2}$). Die zweite Lösung ist in der $x-$Richtung instabil (ein Sattelpunkt), wie man auch numerisch festlegt, und wird hier nicht mehr untersucht. Bis auf die Glieder zweiter Ordnung finden wir

$$L_{um\,(0,0)} = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - D(y^2 + 2x^2),$$

sodass die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{2D}{m}x, \\ \ddot{y} &= -\frac{D}{m}y, \end{aligned}$$

und sind also, wegen der ursprünglichen Drehung schon entkoppelt. Die Eigenfrequenzen sind $\sqrt{2D/m}$ (in der x-Richtung) und $\sqrt{D/m}$ in der $y-$Richtung, was auch zu erwarten war, denn x die Richtung zwischen den Federn 2 und 3, und y die Richtung zwischen $(0,0)$ und der ersten Feder sind.

45 Aufgabe

𝔇ie potentielle Energie aller Federn ist

$$V = -\frac{D}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(y_n - y_{n-1} - a)^2 = -\frac{D}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(x_n - x_{n-1})^2,$$

wobei D die Federkonstante bezeichnet. Diese Form von V führt zu der Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\dot{x}_n^2 - \frac{D}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(x_n - x_{n-1})^2$$

aus der die Euler-Lagrange-Gleichungen unsere Bewegungsgleichungen sind:

$$\ddot{x}_n = -\Omega^2(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

wobei $\Omega^2 = D/m$. Wir führen die Bezeichnung $ka \equiv \varphi$. Der Ansatz

$$x_n = \left(e^{i\varphi}\right)^n Q_\varphi(t)$$

löst tatsächlich die Bewegungsgleichungen, denn wir erhalten

$$\ddot{Q}_\varphi = -[2\Omega\sin(\varphi/2)]^2 Q_\varphi$$

für alle n gleichzeitig. Die Eigenfrequenzen sind jetzt einfach abzulesen:

$$\omega_\varphi = \pm 2\Omega\sin(\varphi/2).$$

𝔄us der Form des Ansates, $x_n = \left(e^{i\varphi}\right)^n Q_\varphi(t)$, muss jeden klar sein, dass eine Verschiebung von φ um 2π kein Einfluss auf die Form von x_n hat, und damit keine Bedeutung besitzt. Mit Hilfe solcher Verschiebungen kann φ immer auf den Intervall $[-\pi, \pi]$ gebracht werden. Nun muss man auch bemerken, dass eine Verschiebung von φ nur um π doch ein Einfluss auf x_n hat, wie man sich leicht überzeugen kann z.B. wenn man $\varphi = \pi/2$ (Phasen $-i, 1, i, -1$ für $n = -1, 0, 1, 2$) und $\varphi = -\pi/2$ (Phasen $i, 1, -i, -1$) vergleicht.

Zum (d): 𝔇ie Randbedingung

$$x_{n+N} = x_n$$

zusammen mit unserem Ansatz führt zu

$$e^i(N\varphi) = e^{i\ell\pi i}, \qquad \ell \in \mathbb{Z}$$

d.h. zu

$$\varphi = \frac{2\pi\ell}{N}.$$