UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 13

Musterlösungen

40 Aufgabe

In dieser Aufgabe wird die Einsteinsche Summenkonvention besonders nützlich. Aus der Lagrangefunktion ergibit sich der folgende Ausdruck für die kanonischen Impulse:

$$p_k = m\dot{q}_k + \frac{e}{c}A_k.$$

Die Geschwindigkeiten lassen sich durch die Impulse eindeutig darstellen:

$$\dot{q}_k = \frac{1}{m}\,(p_k - \tfrac{e}{c}A_k).$$

Die Hamiltonfunktion ist jetzt leicht zu finden:

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \tfrac{e}{c}\vec{A})^2 + e\varphi.$$

Die Hamiltonsche Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}
\dot{q}^i &= \frac{1}{m}(p^i - \tfrac{e}{c}A^i), \\
\dot{p}_i &= \frac{e}{mc}(p_k - \tfrac{e}{c}A_k)\,\partial_i A^k - e\partial_i\varphi,
\end{aligned}$$

wobei $\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$. Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein so erhält man

$$m\ddot{q}_i = eE_i + \frac{e}{c}\,\dot{q}^k\,(\partial_i A_k - \partial_k A_i),$$

wobei die Identität

$$\frac{dA_k}{dt} = \frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt}$$

verwendet wurde. Wegen

$$(\dot{q} \times B)^i = \dot{q}_n(\partial^i A^n - \partial^n A^i)$$

sind die Hamiltonsche Begungsgleichungen den Newtonschen Bewegungsgleichungen mit der Lorentzkraft äquivalent.

Zu (d): Man sieht leicht, dass konstante Potentiale auf $\vec{E} = 0 = \vec{B}$ führen, sodass es sich im solchen Fall um ein freies Teilchen handelt (das Problem ist offensichtlich integrabel). Dies ist nicht die allgemeinste Bedingung für die Integrabilität, denn auch für konstante *Felder* eine explizite Lösung der Bewegungsgleichungen leicht zu finden ist. Zeitunabhängigkeit der Potentiale (vor Allem von φ) liefert nur eine erhaltene Größe (die Energie). In drei Dimensionen braucht man aber drei (unabhängige) erhaltene Größen um die Lösung durch Integrale ausdrücken zu können. Es fehlen also im allgemeinen Fall zwei erhaltene Größen.

41 Aufgabe

Die Bewegungsgleichung eines gedämpften Oszillators,

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + m\omega^2 x = 0$$

wird durch

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{m}t}\sin(\Omega t + \varphi)$$

gelöst, wobei A, φ und $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}}$ reelle Konstanten bezeichnen. Der Impuls ist nach Voraussetzung durch

$$p(t) = m\dot{x} + \gamma x = mA\Omega e^{-\frac{\gamma}{m}t}\cos(\Omega t + \varphi)$$

gegeben[1]. Gehen wir mit Hilfe einer flächentreuen Transformation

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \lambda x = R \cdot e^{-\frac{\gamma}{m}t}\sin(\Omega t + \varphi) \\ \tilde{p} &= \frac{1}{\lambda}p = R \cdot e^{-\frac{\gamma}{m}t}\cos(\Omega t + \varphi), \end{aligned}$$

mit einem geeigneten Skalenfaktor λ zu neuen Koordinaten über, so sieht man leicht, dass die Zeitentwicklung als Komposition einer (flächentreuen) Drehung und einer exponentiellen Skalierung mit $\exp(-\frac{\gamma}{m}t)$ besteht. Damit wird die Fläche allen Phasenraumgebieten exponentiell reskaliert und für $t \to \infty$ gegen Null konvertiert.

42 Aufgabe

Mit dem allgemeinen Ansatz

$$S = -P_3 t + h_1(r) + h_2(\theta) + h_3(\varphi)$$

ergibt sich zunächst die Differentialgleichung

$$r^2(\partial_r h_1)^2 + (\partial_\theta h_2)^2 + \frac{(\partial_\varphi h_3)^2}{\sin^2(\theta)} + 2m[a(r)r^2 + b(\theta)] = 2mP_3$$

[1] Aus dimensionalen Gründen muss vor $\dot{x}$ die Masse m stehen, denn $[\gamma] = \frac{g}{s}$.

in der nur der Term $\partial_\varphi h_3(\varphi)$ hängt vom φ ab. Es muss also

$$\partial_\varphi h_3 = P_1$$

gelten[2], was der Tatsache entspricht, dass die Koordinate φ zyklisch ist und die erzeugende Funktion S hängt nur über $P_1 \cdot \varphi$ vom φ ab. Es bleibt die Gleichung

$$\underbrace{r^2\Big[(\partial_r h_1)^2 - 2ma(r)\Big]}_{=P_2} + \underbrace{\Big[(\partial_\theta h_2)^2 + \frac{(P_1)^2}{\sin^2(\theta)} + 2mb(\theta)\Big]}_{=C=2mP_3-P_2} = 2mP_3,$$

wobei wir schon die entsprechenden Konstanten P_1, P_2, P_3 eingesetzt hatten. In anderen Worten:

$$r^2\Big[(\partial_r h_1)^2 - 2ma(r)\Big] = P_2,$$
$$(\partial_\theta h_2)^2 + \frac{(P_1)^2}{\sin^2(\theta)} + 2mb(\theta) = 2mP_3 - P_2.$$

Diese gewönliche Differentialgleichungen lassen sich lösen durch eine formale Integration:

$$S = -P_3 t + P_1\varphi \pm \int \sqrt{\frac{P_2}{r^2} - 2ma(r)}\, dr \pm \int \sqrt{2mP_3 - P_2 - 2mb(\theta) - \frac{P_1^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta$$

Die erzeugende Funktion S hängt damit von den drei Konstanten P_1, P_2, P_3 ab, die die (neue) kanonische Impulse darstellen. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen erhält man indem man S nach P_i ableitet:

$$\frac{\partial S}{\partial P_i} = Q^i, \qquad i = 1, 2, 3$$

wobei die drei (von der Zeit unabhängige) Konstanten Q_i die (neuen) kanonischen Koordinaten bezeichnen. Auf diese Weise hängt eine allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen von sechs beliebigen Konstanten P_i, Q^i.

[2] Auf der rechten Seite kann, offensichtlich, eine beliebige Funktion von P_1 stehen.