UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 12

Musterlösungen

37 Aufgabe

Man findet sofort

$$\{q_j, p_k\} = \delta_{jk}, \qquad \{q_j, q_k\} = 0 = \{p_j, p_k\}.$$

Die Punkte (b) und (c) sind leicht zu verifizieren. Zum (d) definieren wir zunächst die Drehimpulse

$$\ell_i = \epsilon_{ijk} q^j p^k.$$

Mit Hilfe von (a), (c) ergibt sich

$$\{\ell_i, p_s\} = \epsilon_{isk} p^k, \qquad \{\ell_i, q_s\} = \epsilon_{isk} q^k.$$

Ohne Angabe der Hamiltonfunktion läßt sich nicht sagen welche Gößen in der Zeit erhalten bleiben.

38 Aufgabe

𝔚ir wiederholen kurz die Methode der kanonischen Transformationen. Die Hamiltonsche Gleichungen

$$\dot{q} = \partial_p H$$
$$\dot{p} = -\partial_q H$$

erhalten ihre Form bei der Transformation $(q, p) \to (Q, P)$,

$$\dot{Q} = \partial_P K$$
$$\dot{P} = -\partial_Q K$$

mit einer neuen Hamiltonfunktion $K(Q, P, t)$ nur wenn die Transformation kanonisch ist, d.h. z.B. wenn die Poisson-Klammern zwischen Q und P “korrekt bleiben”:

$$\{Q, P\} = 1$$

oder (und das ist die vollständigste Antwort) wenn es eine erzeugende Funktion (Potential) $F(q, Q)$ mit den Eigenschaften [1]

$$\begin{aligned} \partial_q F &= p, \\ \partial_Q F &= -P, \end{aligned}$$

existiert. Als notwendige Bedingung gilt hier

$$\partial_Q p = -\partial q P.$$

Schließlich muss noch, sobald sie vorhanden ist, die Hamiltonfunktion transformiert werden:

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \partial_t F(q, P, t).$$

Hier muss beachtet werden, dass bei dem letzten Glied die Variablen (q, P, t) (klein q!) als unabhängig betrachtet werden sollen, d.h. $\partial_t P = 0 = \partial_t q$. Zum Schluss muss der ganze Ausdruck durch Q, P und t ausgedrückt werden[2].

Teil (a). Die notwendige Bedingung $\{Q, P\}$ ist hier nicht erfüllt, denn

$$\{Q, P\} = 2p^2 + 6q^2 p + \frac{2p}{q} + 3q.$$

Teil (b). Man sieht leicht, dass die angegebene Transformation eigentlich zwei Transformationen von zwei unabhängigen Hamilton-Systemen beschreibt. Zunächst wird das System das durch (q_1, p_1) beschrieben ist zu den neuen Variablen (Q_1, P_1) transformiert[3]

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sqrt{2p_1}\sin(\mu q_1), \\ P_1 &= \frac{1}{\mu}\sqrt{2p_1}\cos(\mu q_1). \end{aligned}$$

[1] Man kann, natürlich, auch die von den anderen kanonischen Koordinaten abhängige erzeugende Funktionen benutzen.

[2] In der Hamilton-Jakobi-Methode wird eine solche erzeugende Funktion $S(q, P, t)$ gesucht, für die $K = 0$ gilt. Die neuen kanonischen Koordinaten, (Q, P), sind dann Konstanten der Bewegung. Es ist a priori nicht klar welche kanonische Transformation auf $K = 0$ führen soll, und deshalb wird die erzeugende Funktion S aus der (Hamilton-Jakobi) Differentialgleichung ermittelt.

[3] In der Aufgabenstellung hat der Ausdruck für Q_1 einen falschen Vorzeichen, das auf $\{Q_1, P_1\} = -1$ führt (wir verwenden die übliche Definition $\{f, g\} = \partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g$.. Wir vernachlässigen auch die triviale kanonische Reskalierung $(q, p) \to (\frac{1}{\sqrt{k}} q, \sqrt{k}\, p)$ und die triviale Zietverschiebung der q Koordinate, den diese Transformationen immer kanonisch sind.

Es ist leicht zu sehen, dass $\{Q_1, P_1\} = 1$, sodass die Transformation kanonisch ist. Aus

$$Q_1 = \mu P_1 \tan(\mu q_1),$$
$$p_1 = \frac{(\mu P_1)^2}{2\cos^2(\mu q_1)},$$

und

$$\partial_q W = p,$$
$$\partial_P W = Q,$$

kann jetzt die erzeugende Funktion $W(q_1, P_1)$ gewonnen werden:

$$W = \frac{1}{2}\mu P_1^2 \tan(\mu q_1).$$

$\mathfrak{D}$ie zweite Transformation in dieser Teil der Aufgabe wird durch[4]

$$Q_2 = \cos\omega t \cdot q_2 + \sin\omega t \cdot p_2,$$
$$P_2 = -\sin\omega t \cdot q_2 + \cos\omega t \cdot p_2.$$

definiert. Die Poisson-Klammer zwischen Q_2 und P_2 ist kanonisch, $\{Q_2, P_2\} = 1$. Mit Hilfe von

$$p_2 = q_2 \tan\omega t + \frac{P_2}{\cos\omega t},$$
$$Q_2 = \frac{q_2}{\cos\omega t} + P_2 \tan\omega t$$

finden wir die erzeugende Funktion $W(q_2, P_2, t)$:

$$W(q_2, P_2, t) = \frac{q_2 P_2}{\cos\omega t} + \frac{\tan(\omega t)}{2}(q_2^2 + P_2^2).$$

Teil (c). Wie in der Teil (b) darf man die Reskalierung, κ, und die Zeitverschiebung (bei Q) vernachlässigen, denn die die triviale kanonische Transformationen beschreiben. Ebenso ist es klar, dass die Reskalierung $q \to \lambda q$ zusammen mit $P \to \frac{1}{\lambda}P$ auch kanonisch ist. Damit legen wir auch $\lambda = 1$. Die Transformation ist dann durch

$$Q = \arctan(q/p),$$
$$P = \frac{1}{2}(q^2 + p^2),$$

[4] Wir haben wieder das Vorzeichen bei P_2 geändeert.

gegeben. Sie ist kanonisch[5] wegen $\{Q, P\} = 1$. Für diese Transformation läßt sich die erzeugende Funktion $F(q, Q)$ einfach bestimmen. Zunächst

$$p = q \tan Q,$$
$$P = \frac{q^2}{2\cos^2 Q},$$

und dann

$$F(q, Q) = \frac{q^2 \tan Q}{2}.$$

39 Aufgabe

Die Hamiltonsche Gleichungen für das in dieser Aufgabe betrachteten System lauten

$$\dot{q} = \frac{p}{m},$$
$$\dot{p} = -m\omega^2 q.$$

Für $q(t)$ ergibt sich die GDGl zwieter Ordnung

$$\ddot{q} = -\omega^2 q,$$

mit der allgemeinen Lösung

$$q = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

und damit

$$p = Am\omega \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Die Lösung ist offensichtlich durch zwei Integrationskonstanten, (A, φ_0), parametrisiert. Durch eine Zeitverschiebung läßt sich die φ_0 eliminieren. Dann hat $A \cdot \omega$ die Interpretation der Anfangsgeschwindigkeit. Die Integralkurve $(q(t), p(t))$ beschreibt eine Ellipse in der Phasenraum (die Form dieser Kurve hängt, offensichtlich, nicht von φ_0 ab); die Bewegung erfolgt in der positiven Richtung. Die Halbachsen der Ellipse sind: $(A, m\omega A)$.

Teil (c) Um den Fluss der Phasenraumgebieten zu illustrieren führen wir eine kanonische Transformation (Reskalierung):

$$Q = q \cdot \sqrt{m\omega},$$
$$P = p \cdot \frac{1}{\sqrt{m\omega}}$$

[5] Wir mussten wieder das Vorzeichen bei Q ändern.

In den neuen Variablen wirkt die Zeitentwicklung einfach wie eine Drehung um den Koordinatenursprung:

$$\dot{Q}(t) = \tilde{A}\sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$\dot{P}(t) = \tilde{A}\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Das rechteckige Phasenraumgebiet $Q \in [-\sqrt{m\omega}, \sqrt{m\omega}]$, $P \in [-\sqrt{m\omega}, 2\sqrt{m\omega}]$ wird also nur um einen ensprechenden Winkel gedreht. Um einen Blick im ursprunglichen Koordinaten zu gewinnen muss noch nur die Reskalierung zu (q, p) zurückgeführt werden. Diese Transformation ist zwar nicht Winkeltreu, aber immer Flächentreu (wie auch jede andere kanonische Transformation nach der Satz von Liouville).