

UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 11
Musterlösungen

32 Aufgabe

Das in der Aufgabe betrachtete System ist, wie man sich leicht überzeugen kann, eindimensional: es reicht die Länge des vom Tisch herunterhängenden Seilstücks anzugeben um das System vollständig zu charakterisieren. Die potentielle Energie ist durch

$$V = mgx_0$$

gegeben, wobei

$$x_0 = \frac{1}{m} \left[m \frac{\ell - x}{\ell} \cdot 0 + m \frac{x}{\ell} \cdot \frac{(-x)}{2} \right] = \frac{-x^2}{2\ell}$$

die Höhe des Schwerpunktes bezeichnet. Beschleunigt muss die ganze Masse sein, und deshalb

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + mg \frac{x^2}{2\ell}.$$

Aus dieser Lagrangefunktion folgen die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{x} = \frac{g}{\ell} x,$$

die auch leicht mit Hilfe der Kräftegleichung hergeleitet werden können. Mit der Bezeichnung $k^2 = g/\ell$ finden wir die Lösung

$$x = \ell_0 \cosh(kt)$$

die durch die Anfangsbedingungen $x(0) = \ell_0$, $\dot{x}(0) = 0$ eindeutig charakterisiert ist. Zur Zeit

$$t_b = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \operatorname{arccosh}(h/\ell_0)$$

erreicht das untere Seilende den Boden, $x = h$.

33 Aufgabe

Wir führen die Bezeichnung $m \equiv m_1$, $M \equiv m_2$. Natürlich muss sich m in einer zweidimensionalen $(x - y)$ Ebene bewegen, während M nur in einem (eindimensionalen) Intervall $z = [0, \ell]$ gleitet.

Der Faden führt dazu, dass $r + z = \ell = \text{const}$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (die einzige nicht-triviale Zwangsbedingung). Ansonsten gibt es einen Gravitationspotential $V = -mgz$. Wir finden

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{M}{2}\dot{z}^2 + Mgz = \frac{M+m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 - Mgr.$$

Die letzte Gleichung folgt (in Polarkoordinaten) durch das Einsetzen der Zwangsbedingung und Vernachlässigung der Konstante $Mg\ell$.

Das System ist also durch zwei verallgemeinerte Koordinaten (r, φ) beschrieben. Wir finden die verallgemeinerte Impulse:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= mr^2\dot{\varphi} \equiv J, \\ p_r &= (m+M)\dot{r}. \end{aligned}$$

Der Drehimpuls, $p_\varphi = J$, auf Grund der axialen Symmetrie des Problems wird erhalten. Die Hamiltonfunktion

$$H = \dot{\varphi}p_\varphi + \dot{r}p_r - L = \frac{m+M}{2}\dot{r}^2 + Mgr + \frac{J^2}{2mr^2} \equiv E$$

wird auch erhalten, denn die Lagrangefunktion zeitunabhängig ist.

Die Bewegung ist äquivalent zu der Bewegung eines Massenpunktes der Masse $m+M$ auf einem Intervall $r \in [0, \ell]$ unter dem Einfluß eines effektiven Potentials:

$$U = Mgr + \frac{J^2}{2mr^2}.$$

Das Potential hat ein Minimum bei $r_0 = \left(\frac{J^2}{mMg}\right)^{\frac{1}{3}}$. Eine standard Überlegung zeigt jetzt:

- $r = 0$ ist nur dann erreichbar, wenn $J = 0$,
- Wenn $r_0 \in [0, \ell)$ wird das System um r_0 oszillieren¹.
- Wenn $r_0 > \ell$ wird $r = \ell$ (d.h. $z = 0 \Leftrightarrow M$ ruht infinitesimal unter der Tischplatte) immer nach endlicher Zeit erreicht.
- Für $r_0 \in [0, \ell)$ wird $\dot{r} = 0 = \dot{z}$ für die Bewegung mit den Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = J/mr_0^2$.

Schließlich die Euler-Lagrange Gleichungen für das System waren:

$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{r} &= -Mg + mr\dot{\varphi}^2, \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}$$

¹Das Verhalten am Rande, $r = \ell$ wurde nicht spezifiziert.

34 Aufgabe

Für die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \lambda(\dot{x}y - x\dot{y})$$

findet man die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -2\lambda\dot{y}, \\m\ddot{y} &= +2\lambda\dot{x}.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind äquivalent zu den Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens in einem zu der $x - y$ Ebene senkrechten Magnetfeld der Stärke $B = \frac{2\lambda c}{q}$ (q : Ladung des Teilchens, c : Lichtgeschwindigkeit). Die kanonische Impulse sind

$$\begin{aligned}p_x &= m\dot{x} + \lambda y, \\p_y &= m\dot{y} - \lambda x,\end{aligned}$$

und gegen üblichen Impulsen ($m\dot{x}$, $m\dot{y}$) enthalten eine positions- und Magnetfeld-abhängige Korrektur. Die Symmetrien des Systems sind am besten in Zylinderkoordinaten erkennbar: wir rechnen die Lagrangefunktion um und finden

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \lambda r^2\dot{\varphi}.$$

Diese Funktion ist von der Zeit und von der Winkel φ unabhängig. Erhalten werden damit: der Drehimpuls, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi \equiv J$,

$$J = r^2(m\dot{\varphi} - \lambda),$$

und die Energie (Hamiltonfunktion ausgedrückt durch Geschwindigkeiten statt Impulse):

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

(das Magnetfeld trägt nicht zu der Energie bei). Die Hamiltonfunktion ist

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + \frac{\lambda p_\varphi}{m} + \frac{\lambda^2 r^2}{2m}$$

in Zylinderkoordinaten (hier $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$), und

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{\lambda}{m}(xp_y - p_x y) + \frac{\lambda^2(x^2 + y^2)}{2m}.$$

in kartesischen Koordinaten. Aus der letzten Form ist es leicht zu sehen, dass

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{y} = \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\lambda}{m}(p_y + \lambda x) = -\lambda\dot{y}$$

d.h. die hamiltonische Gleichungen (bzgl. x, p_x) den Euler-Lagrange Gleichungen äquivalent sind. Das Gleiche gilt offensichtlich auch bzgl. y, p_y (und ebenfalls für r, p_r und φ, p_φ).

35 Aufgabe

35.1 Reibungsfreier Fall

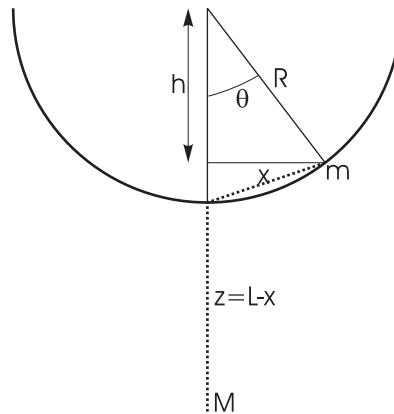


Abbildung 1: Geometrie zur Aufgabe 35.

Mit den Bezeichnungen wie im Abb. 1 gilt

$$x = 2R \sin \theta/2, \quad z = \ell - 2R \sin \theta/2.$$

Die quadratische Form der kinetischen Energie, unter Verwendung der Kugelkoordinaten, lautet

$$T = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{M}{2} \dot{z}^2 = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{M}{2} R^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) \dot{\theta}^2.$$

Für die gravitative potentielle Energie findet man

$$V = -mgh - Mgz = -g[mR \cos \theta - 2MR \sin(\theta/2)]$$

Das System ist also durch zwei verallgemeinerte Koordinaten, (θ, φ) , beschrieben. Wir finden die Lagrangefunktion

$$L = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{M}{2} R^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) \dot{\theta}^2 + g[mR \cos \theta - 2MR \sin(\theta/2)].$$

Im diesen (reibungsfreien) Fall wird die Energie, und der Drehimpuls $J = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ erhalten.

Die Euler-Lagrange Gleichungen sind

$$mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + MR^2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \dot{\theta}^2 - mgR \sin \theta - MgR \sin(\theta/2) + \left\{ mR\ddot{\theta} + MR^2 \sin^2(\theta/2)\ddot{\theta} + MR^2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)\dot{\theta}^2 \right\} = 0 \quad (1)$$

(Die Terme in den $\{ \}$ Klammern entsprechen den $\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}}$.) Auf der rechten Seite wird später die generalisierte Reibungskraft Q_θ auftreten. Die φ -Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt}(mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0,$$

und wird allgemein auf der rechten Seite noch von Q_φ ergänzt. Aus der θ -Gleichung lassen sich die Ruhelagen des Systems bestimmen: man sieht, dass der Winkel $\theta = \theta_0$ in der Zeit konstant wird, wenn die Anfangsbedingungen $\theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0$ (und $\varphi, \dot{\varphi} = \omega$ beliebig) eingesetzt werden, und wenn $\frac{dL}{d\theta} = 0$ wird. Dies führt auf die folgende algebraische Gleichung dritter Ordnung hin:

$$4R\omega^2 u^3 - 2(R\omega^2 + g)u - \frac{M}{m}g = 0$$

mit $u = \cos(\theta_0/2)$, oder $\theta_0 = 0$. Wegen $u \in [0, 1]$ sieht man, dass für $\omega = 0$ tritt nur die triviale Lösung $\theta_0 = 0$ auf. Allgemein könnte es bis zu drei Lösungen geben. In dem Fall mit Reibung wird das sich auf der Schale bewegende Teilchen immer abgebremst, d.h. eine stabile Ruhelage existiert nur mit $\omega = 0$, und damit darf es nur die triviale Ruhelage sein.

35.2 Reibung

Zu den generalisierten Reibungskräfte werden wir im folgenden die in der Vorlesung gezeigte Äquivalenz der Beschreibung mit Hilfe der Koordinatisierungsabbildung und mit Hilfe der Dissipationsfunktion wiederholen. Allgemein die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} - \frac{\partial L}{\partial q^m} = Q_m,$$

wobei L die Lagrangefunktion ist, und Q_m die vom Ort und Geschwindigkeit abhängige Reibungskraft (die aus der Euler-Lagrange Gleichungen nicht hergeleitet werden kann) bezeichnet. Zunächst wird die Reibungskraft als ein Vektor im euklidischen Raum festgelegt, z.B. durch

$$F^i = -k \dot{x}^2 \dot{x}^i.$$

Nun muss diese Kraft (angegeben bzgl. der euklidischen Orthonormal-Basis $\frac{\partial}{\partial x^i}$) in der Basis von Tangentialvektoren der Zwangsfläche $\frac{\partial}{\partial q^m}$ ausgedrückt werden:

$$Q_m = F^i \frac{\partial x_i}{\partial q^m}.$$

(die Einsteinsche Summenkonvention wird hier benutzt). Nun wegen

$$\frac{\partial x_i}{\partial q^m} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}^m}$$

(diese Identität beruht auf $\frac{\partial q}{\partial \dot{q}} = 0$, $\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}} = 1$) folgt unmittelbar

$$Q_m = -\frac{\partial(k \dot{x}^4/4)}{\partial \dot{q}^m}$$

Drückt man jetzt $k \dot{x}^4/4$ durch q^m und \dot{q}^m so erhält man die Dissipationsfunktion $\mathcal{P}(q, \dot{q})$, sodass schließlich

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} - \frac{\partial L}{\partial q^m} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \dot{q}^m}.$$

Im unseren Fall gilt

$$\mathcal{P} = -\frac{k}{4}(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)^2$$

und damit

$$Q_\theta = -k(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)\dot{\theta}, \quad (2)$$

$$Q_\varphi = -k(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \sin^2(\theta) \dot{\varphi}. \quad (3)$$

Von den erhaltenen Größen bleibt keine übrig, denn die Energie wird durch die Reibung dissipiert und der Drehimpuls wird auch durch die Schale absorbiert. Es ist auch unwahrscheinlich, dass andere Größen (Funktionen der momentanen $\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}$) erhalten werden, denn wie schon früher gesagt wurde das System wird immer an die triviale Ruhelage $\theta = 0$ konvergieren. Damit musste eine solche in der Zeit erhaltene Größe für alle Anfangsbedingungen den gleichen Wert annehmen und wäre deshalb trivial.

36 Aufgabe

Zunächst betrachten wir den Teil (b). In den ganzen Konstruktion der Legendretransformierte spielt q keine Rolle (und wird deshalb in dieser Lösung nicht explizit hingeschrieben). Wir haben

$$L[u] = \frac{m}{2}u^2 - V,$$

wobei $m = m(q)$, $V = V(q)$. Der Impuls ist gegeben durch

$$p = \frac{\partial L}{\partial u} = mu$$

und damit die Geschwindigkeit läßt sich eindeutig durch den Impuls ausdrücken

$$u = (L')^{-1}(p) = \frac{p}{m} \equiv g(p).$$

Für die Legendretransformierte von L finden wir

$$H(p) = \mathcal{L}L = pg(p) - L(g(p)) = \frac{p^2}{2m} + V.$$

Um einen Hinweis für den Teil (a) zu bekommen führen wir eine weitere Legendretransformation durch. Es sei

$$\tilde{p} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m$$

ein neuer "Impuls", sodass

$$p \equiv \tilde{g}(\tilde{p}) = m\tilde{p}.$$

Die Legendretransformierte von H ist

$$\mathcal{L}H(\tilde{p}) = \tilde{p}p - H(p),$$

wobei, weil $\mathcal{L}H$ eine Funktion der \tilde{p} sein soll, p muss als $\tilde{g}(\tilde{p})$ verstanden werden. Wir finden

$$\mathcal{L}H(\tilde{p}) = \frac{m}{2}\tilde{p}^2 - V,$$

was mit $L(\tilde{p})$ übereinstimmt d.h. \tilde{p} soll mit u identifiziert werden.

Im Teil (a) soll gezeigt werden, dass

$$\mathcal{L}[\mathcal{L}L](u) = L[u].$$

Zunächst

$$p = \frac{\partial L}{\partial u}(u) \equiv L'(u),$$

sodass

$$u = g(p) \equiv [L']^{-1}(p).$$

Wir finden

$$H(p) = \mathcal{L}L = pg(p) - L(g(p)).$$

Für die zweite Legendretransformation definieren wir wieder

$$\tilde{p} = \frac{\partial H}{\partial p} = g(p) + \frac{\partial g}{\partial p} \cdot p - \frac{\partial L}{\partial u}(g(p)) \cdot \frac{\partial g}{\partial p} = g(p).$$

Die letzte Gleichheit folgt aus $p - \frac{\partial L}{\partial u} = 0$. Wir schließen, dass

$$p = g^{-1}(\tilde{p}).$$

Die Wirkung der zweiten Legendretransformation ist jetzt nicht schwer zu ermitteln:

$$(\mathcal{L}H)(\tilde{p}) = \tilde{p}p - H(p) = L(\tilde{p}).$$

Wesentlich hier ist, dass die Funktion $g(p)$ invertierbar ist, sodass $g(g^{-1}(\tilde{p})) = \tilde{p}$.