UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Theoretische Mechanik

Übungsblatt 10
Musterlösungen

28 Aufgabe

Nach der Voraussetzung sind die Kräfte konservativ, d.h. es existiert eine Funktion $U(t, x_1^i, \ldots, x_N^i)$ so dass

$$F_i^A = -\frac{\partial U}{\partial x_A^i}.$$

(F_i^A die i-te Komponente der auf das A-te Teilchen wirkenden Kraftes bezeichnet, und x_A^i ist die i-te Komponente des Orts-Vektors des A-ten Teilchens.) Diese Funktion beschreibt gleichzeitig die potentielle Energie des Systems (d.h. die Gesamtenergie ist $\sum_A \frac{m_A}{2} \cdot (\dot{\vec{x}}_A)^2 + U$). Die Lagrange-Funktion ist

$$L = \sum_A \frac{1}{2} m_A \cdot (\dot{\vec{x}}_A)^2 - U(t, x_1^i, \ldots, x_N^i).$$

und die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A^i} = \frac{\partial L}{\partial x_A^i}$$

sind offensichtlich zu den Newtonschen Gleichungen equivalent, denn

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A^i} = m_A \ddot{x}_A^i.$$

29 Aufgabe

Wir werden die freie Lagrangefunktion schrittweise einschränken und transformieren. Zunächst

$$L = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)] + mgr\cos\theta,$$

(im Kugelkoordinaten). Nun $r = const = R$ (und daher $\dot{r} = 0$):

$$L = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + mgR\cos\theta,$$

weiterhin wollen wir zu einem rotierenden Bezugssystem übergehen, mit den azimutalen Winkel $\psi = \varphi - \omega t$, so dass $\dot{\psi} = \dot{\varphi} - \omega$. Die Lagrangefunktion im diesen Koordinatensystem ist

$$L = \frac{mR^2}{2}[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta(\dot{\psi} + \omega)^2] + mgR\cos\theta.$$

Die letzte Einschränkung ist, dass $\psi = const$ sein muss; wir finden

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2}[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\omega^2] + mgR\cos\theta.$$

Es gibt nur eine Euler-Lagrange Gleichung – die für $\theta(t)$, weil das die einzige verallgemeinerte Koordinate ist:

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta.$$

Die Beschleunigung verschwindet, $\ddot{\theta} = 0$, wenn

$$\cos\theta_0 = \frac{g}{\omega^2 R}$$

oder wenn

$$\sin\theta_0 = 0.$$

Wegen der verschiedenen Einschränkungen muss jetzt der Berech von θ erweitert werden: $\theta \in (-\pi, \pi]$. Wenn $|g/\omega^2 R| < 1$ dann gibt es vier Gleichgewichtspunkte; sonst gibt es nur zwei: bei $\theta_c = 0$ und $\theta_c = \pi$.

30 Aufgabe

𝔚ir parametrisieren die Bahnkurve folgendermaßen:

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$
$$y = a(\cos\theta - 1),$$

und aus $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$ finden

$$\mathcal{L} = 8ma^2 \sin^2 w \left(\dot{w}^2 + \frac{\Omega^2}{4}\right),$$

wobei $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2) = 2\sin^2 w$ und $\Omega = \sqrt{g/a}$. Die multiplikative Konstante, $8ma^2$, die kein Einfluß auf die Bewegungsgleichungen hat wird im Folgenden vernachlässigt. Die Euler-Lagrange Gleichungen sind

$$\ddot{w}\,\sin^2 w + \sin w\cos w(\dot{w}^2 - \tfrac{\Omega^2}{4}) = 0. \tag{1}$$

𝔐it $u = \cos w$ wird die Lagrangefunktion auf

$$\mathcal{L} = \dot{u}^2 + \frac{\Omega^2}{4}(1 - u^2) \equiv \dot{u}^2 - \frac{\Omega^2}{4}u^2$$

transformiert, wobei der oberen Equivalenz (die mit $\equiv$ bezeichnet wurde) die Tatsache zu Grunde liegt, dass additive Konstanten in der Lagrangefunktion auch kein Einfluß auf die Bewegungsgleichungen haben. Somit haben wir die Lagrangefunktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators gefunden! Die Euler-Lagrange Gleichungen für diese Funktion sind

$$\ddot{u} = -\frac{\Omega^2}{4} u$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u = A \sin(\tfrac{\Omega}{2}\, t + c).$$

Die angegebene Anfangsbedingungen sind zu $\{\theta(0) = \pi, \dot{\theta}(0) = \Omega\}$, d.h. zu $\{u(0) = 0, \dot{u}(0) = -\frac{\Omega}{2}\}$ equivalent. Die gesuchte Lösung mit diesen Anfangsbedingungen ist

$$u = -\sin(\tfrac{\Omega}{2}\, t),$$

d.h.

$$\theta = \pi - \Omega t.$$

Obwohl die Transformation $u = \cos(\theta/2)$ nur z.B. für $\theta \in [0, \pi]$ Umkehrbar ist, ist die gefundene Lösung *für alle Zeiten gültig*, denn sie die Bewegungsgleichung (1) immer erfüllt.

31 Aufgabe

Ein infinitesimaler Abstand ds im flachen euklidischen Raum ist durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

gegeben. Auf der Oberfläche eines Zylinders

$$\begin{aligned} x &= R\cos\varphi, \\ y &= R\sin\varphi \end{aligned}$$

gilt

$$ds^2 = dz^2 + R^2 d\varphi^2$$

das heißt

$$1 = \sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\varphi}^2} \tag{2}$$

wenn $\dot{z} \equiv \frac{dz}{ds}$ und $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{ds}$. Die Länge einer Kurve ist über ein Funktional (Integral)

$$S = \int_{P_0}^{P_1} ds = \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{\dot{z}^2 + R^2\dot{\varphi}^2}\, ds = \int_{P_0}^{P_1} L[\dot{z}, \dot{\varphi}]\, ds$$

zu berechnen, wobei $P_{0/1}$ den Anfangs-/Endpunkt bezeichnen. Die Geodäten sind diejenigen Kurven, die dieses Funktional minimieren. Im Fall des Zylinders ist der Integrand vom z und φ unabhängig und somit ergeben sich zwei Erhaltungsgrößen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = A,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = B.$$

Mit Hilfe von (2) lassen sich diese als

$$\dot{z} = \sin\alpha,$$
$$R\dot{\varphi} = \cos\alpha,$$

darstellen, und die allgemeine Lösung lautet

$$z = z_0 + s \cdot \sin\alpha,$$
$$\varphi = \varphi_0 + \frac{s}{R}\cos\alpha.$$

Für die in der Aufgabe angegebenen Anfangs-/Endpunkte sind die Geodäten durch

$$z = s \cdot \sin\alpha,$$
$$\varphi = \frac{s}{R}\cos\alpha.$$

gegeben, wobei für $\varphi_1 \in (0, \pi)$ die kurzeste ist die mit $\sin\alpha = z_1/\sqrt{(z_1)^2 + (R\varphi_1)^2}$, also

$$s = \sqrt{(z_1)^2 + (R\varphi_1)^2}.$$

$\mathfrak{E}$s gibt aber offentischtlich mehrere Geodäten die P_0 und P_1 verbinden; die sind durch die Zahl $m \in \mathbb{Z}$ charakterisiert:

$$\sin\alpha_m = \frac{z_1}{\sqrt{(z_1)^2 + [R(\varphi_1 + 2m\pi)]^2}}$$

sodass

$$s_m = \sqrt{(z_1)^2 + [R(\varphi_1 + 2m\pi)]^2}.$$

Für allgemeine φ_1 immer eine von den Zahlen n auf die kurzeste Geodäte führt (für $\varphi_1 \in [0, \pi)$ ist dass die $n = 0$).