Prof. Dr. K. Sibold
Dr. P. Marecki

Wintersemester 2009/10

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 22. Drehimpuls in Anwesenheit der Magnetfelder[1]

Untersuchen Sie das in dem Landau-Problem verwendete elektromagnetische Potential

$$\vec{A} = (0, Bx, 0)$$

und auch das umgeeichte Potential

$$\underline{\vec{A}} = (-By, Bx, 0)/2.$$

- Bestimmen Sie die Eichtransformation die $\vec{A}$ ins $\underline{\vec{A}}$ überführt. Wie transformieren sich die Wellenfunktionen und die Operatoren: p_x, Π_x, H und der Drehimpulsoperator
$$J_z = x\Pi_y - y\Pi_x$$
bei der Eichtransformation?

- Bestimmen Sie die Form des Kommutators $[J_a, J_b]$ in Anwesenheit eines durch einen allgemeinen $\vec{A}$ beschriebenen Magnetfeldes. Schließen Sie daraus, ob die Eigenwerte des Drehimpulses J_z immer noch Vielfachen von $\hbar$ (spinlose Teilchen) sein müssen.

- Es sei $\psi(\vec{x})$ eine Eigenfunktion von J_z in der Eichung $\vec{A}$ und $\chi(\vec{x})$ eine Eigenfunktion von $\underline{J}_z$ in der Eichung $\underline{\vec{A}}$. Sind diese Wellenfunktionen automatisch orthogonal, wenn die entsprechende Drehimpulseigenwerte verschieden sind?

Aufgabe 23. Orthogonalität der Landau-Niveau-Wellenfunktionen.

Es seien $F_n^k = e^{iky} f_n^k(x)$ die Eigenfunktionen der Landau-Niveaus in der Eichung $\vec{A}$ und $|m, n\rangle = (m!n!)^{-1/2}(a^*)^n(b^*)^m|00\rangle$ die Eigenfunktionen in der Eichung $\underline{\vec{A}}$.

- Berechnen Sie den Erwartungswert von[2] J_z in $|k, n\rangle$ und $|m, n\rangle$. Sind diese Zustände Eigenzuständen von J_z?

- Überlegen Sie ob die Eigenfunktion zu $k = 0$ und $n = 0$, F_0^0, als eine Linearkombination der Eigenfunktionen $|mn\rangle$ (auch nur zu $n = 0$) ausdrückbar sein soll.

- Bestimmen Sie die Zerlegung
$$F_0^0 = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} c_{mn}|mn\rangle.$$

[1] Diese Aufgabe wird von einem Korrektor überprüft.
[2] Es ist, entsprechend, entweder J_z oder $\underline{J}_z$ gemeint.

Aufgabe 24. Negative Wasserstoff-Ionen.

Betrachten Sie ein negatives Wasserstoff-Ion das aus zwei von einem Proton gebunden Elektronen besteht. Zeigen Sie, mit Hilfe der Variationsmethode, dass es einen stabilen Grundzustand gibt ($E_g < E_0 + 0$); verwenden Sie die Versuchsfunktion[3]

$$\Psi(\vec{x},\vec{y}) = N[\psi_1(\vec{x})\psi_2(\vec{y}) + \psi_2(\vec{x})\psi_1(\vec{y})]$$

mit

$$\psi_1(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} e^{-\alpha|\vec{x}|},$$
$$\psi_2(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\beta^3}{\pi}} e^{-\beta|\vec{x}|}.$$

Hinweise:

- Führen Sie zuerst dimensionslosen Koordinaten, sodass

  $$H = \frac{1}{2}(-\nabla_x^2 - \nabla_y^2) - \frac{\gamma}{|\vec{x}|} - \frac{\gamma}{|\vec{y}|} + \frac{\gamma}{|\vec{x}-\vec{y}|},$$

  wobei $\gamma = e^2/\hbar c = 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet;
- Überzeugen Sie sich, dass die Variationsmethode für einen einzelnen Elektron die exakte Grundzustandsenergie liefert $E_0 = -\gamma^2/2$;
- Zeigen Sie dass

  $$\int d^3x d^3y \, e^{-a|x|} e^{-b|y|} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = 2(4\pi)^2 \frac{a^2+3ab+b^2}{a^2b^2(a+b)^3}.$$

  (führen Sie die Kugelkoordinaten für $\vec{x}$ und $\vec{y}$.)
- Normieren Sie die Funktion $\Psi(\vec{x},\vec{y})$.
- Verwenden Sie alle Ihnen verfügbare Methoden um das Minimum der Erwartungswert $\langle H \rangle_\Psi$ zu finden, und zu zeigen, dass es kleiner als E_0 ist.
- Existiert auch ein solches Minimum für die antisymmetrische Wellenfunktion

  $$\Psi_a(\vec{x},\vec{y}) = N[\psi_1(\vec{x})\psi_2(\vec{y}) - \psi_2(\vec{x})\psi_1(\vec{y})]\,?$$

Abgabe: Am Freitag, den 18.12.2009 in der Vorlesung oder bis Montag, 21.12.2009 bei Dr. Marecki in ITP.

[3] Der antisymmetrische Spin-Anteil der Zustands-Wellenfunktion wird hier unwichtig.