
Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 19. Quantenteilchen in homogenen Magnetfelder

In dieser Aufgabe wird das Verhalten von Quantenteilchen in homogenen Magnetfeldern untersucht. Die quantenmechanischen Energieniveaus sind hoch entartet. Das Ziel der Aufgabe ist es diese Situation in Einzelheiten zu verstehen. Hierzu wird (ursprünglich) die Lösung des klassischen Problems hilfreich (klassisches geladenes Teilchen im homogenen \vec{B}). Bestimmen Sie die allgemeine Form solcher Lösung.

In den Quantenmechanischen Fall stehen uns, bei der Interpretation der gefundenen Wellenfunktionen, die folgenden Mittel zur Verfügung:

- die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\rho(x) = \bar{\psi}\psi$
- die Stromdichte

$$j_{\psi}^i = \frac{1}{2m} \left[\bar{\psi} \Pi^i \psi + \overline{\Pi^i \psi} \psi \right],$$

mit dem verallgemeinerten Impulsoperator

$$\Pi^i = \left(-i\hbar \partial^i - \frac{e}{c} A^i \right).$$

- die Erwartungswert des Drehimpulses in der z -Richtung

$$\langle J_z \rangle_{\psi} = \langle x \Pi_y - y \Pi_x \rangle_{\psi}.$$

In den folgenden zwei Teilen sollen diese Mittel eingesetzt werden!

Aufgabe 19(a). Eichung $\vec{A} = (0, B \cdot x, 0)$.

Ein Quantenteilchen befindet sich auf einer Ebene (2D) in einem zu der Ebene senkrechten, homogenen Magnetfeld B . Setzen Sie in

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(-i\hbar \partial_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \left(-i\hbar \partial_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 \right] \quad (1)$$

$\vec{A} = (0, B \cdot x, 0)$, und verwenden Sie den Ansatz

$$\psi = e^{ipy/\hbar} \cdot f(x)$$

um die Energieeigenzustände und deren Energien zu bestimmen.

Hinweis: das Problem bzgl. x lässt sich zu einem harmonischen Oszillator umformen. Interpretieren Sie die Wellenfunktionen der gefundenen Niveaus. Überlegen Sie sich, ob in den Grund- und angeregten Zustände elektrische Ströme fließen, und ob diese Zustände einen Drehimpuls/Impuls besitzen.

Aufgabe 19(b) Eichung $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$.

In einer anderen Eichung werden die Wellenfunktionen etwas näher dem klassischen Verhalten entsprechen. Wir setzen

$$\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0).$$

Um die Energieniveaus und die dazugehörige Wellenfunktionen zu bestimmen gehen Sie folgendermaßen vor: gehen Sie über zu dimensionslosen Koordinaten (x, y) , führen Sie die (komplexe) Variable $z = x + iy$ ein und verifizieren Sie die Relationen

$$\begin{aligned}\partial &\equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\partial_x + \frac{1}{2i}\partial_y, \\ \bar{\partial} &\equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\partial_x - \frac{1}{2i}\partial_y.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$\begin{aligned}a &= -\bar{\partial} - z/2 & b &= \partial + \bar{z}/2 \\ a^* &= \partial - \bar{z}/2 & b^* &= -\bar{\partial} + z/2.\end{aligned}$$

die Vertauschungsrelationen

$$[a, a^*] = 1, \quad [b, b^*] = 1, \quad [a, b] = 0 = [a, b^*]$$

erfüllen. Hierbei überzeugen Sie sich zunächst, dass es darf $\partial(\bar{z}) = 0$ und $\bar{\partial}\partial = \partial\bar{\partial}$ angenommen werden (d.h. man darf z und \bar{z} als unabhängige Variablen betrachten).

Das Eigenproblem kann jetzt (algebraisch) mit Hilfe der Operatoren

$$\begin{aligned}K &= -i\hbar\partial_\varphi = z\partial - \bar{z}\bar{\partial} = \hbar(b^*b - a^*a), \\ H &= \hbar\omega_c(a^*a + \frac{1}{2}), \quad \text{mit } \omega_c = \frac{eB}{mc}\end{aligned}$$

gelöst werden. Bestimmen Sie die Energieeigenfunktionen (und entsprechende Wellenfunktionen) und charakterisieren Sie deren Entartung (mit Hilfe der Eigenwerte von K). Gewinnen Sie auch die volle Interpretation von (einigen) Lösungen niedriger Energie.

Abgabe: Am Freitag, den 4.12.2009 in der Vorlesung.