
Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 16. Störung eines entarteten Zwei-Niveau-Systems

Die Dynamik eines ungestörten Quantensystems sei durch

$$H_0 = E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir betrachten eine Störung

$$H' = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. $H = H_0 + H'$. Finden Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Energien der gestörten Zustände (und die diesen entsprechenden ungestörten (Energie-entarteten) Zustände).

Aufgabe 17. Quantensysteme mit Entartung¹

Ein Quantensystem mit

$$H_0 = E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

wird durch

$$H' = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gestört. Finden Sie die gestörten Energien (alle drei) bis zur zweiten Ordnung in λ und die zugehörigen Zustände bis zur ersten Ordnung in λ .

¹Diese Aufgabe wird von einem Korrektor überprüft.

Aufgabe 18. Teilchen auf einem Kreis im homogenen elektrischen Feld

Ein (geladenes) Quantenteilchen der Masse m bewegt sich auf einem Kreis vom Radius R (die Bewegung sei eindimensional per Annahme, $R = \text{const}$). Der Hamiltonoperator ist durch den Drehimpulsoperator $L = -i\frac{d}{d\varphi}$ ausdrückbar

$$H_0 = \frac{1}{2mR^2} L^2$$

Finden Sie zunächst die normierten Eigenzustände von H_0 und deren Energien. (Die Wellenfunktion mit ihrer Ableitung soll periodisch bei $\varphi = 0 = 2\pi$ sein.) Beobachten Sie, dass (fast alle) Energieniveaus entartet sind.

Nun wird das System durch ein homogenes elektrisches Feld gestört, $V = -eR\mathcal{E} \cos \varphi$. Berechnen Sie die Korrekturen zweiter Ordnung (in $e\mathcal{E}$) zu den Energien der ersten angeregten ungestörten Zustände.

Hinweis: die Entartung wird erst in der zweiten Ordnung aufgehoben. Die erste nicht-triviale Gleichung tritt also erst bei $(e\mathcal{E})^2$ auf; diese Gleichung soll als Eigenwertproblem verstanden werden, und die Eigenwerte sind die Korrekturen zweiter Ordnung zur Energie, während die Eigenvektoren die Funktionen nullter Ordnung (ψ^0) sind.

Abgabe: Am Freitag, den 27.11.2009 in der Vorlesung.