Prof. Dr. K. Sibold
Dr. P. Marecki

Wintersemester 2009/10

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 13. Störung eines harmonischen Oszillators
Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2, \qquad H' = \frac{1}{2}bx^2.$$

$|n\rangle$ seien die ungestörten Energieeigenzustände (EZ. des H_0). Berechnen Sie perturbativ die erste Korrektur der Wellenfunktion des niedrigsten Energieeigenzustands, $|\tilde{0}\rangle = |0\rangle + b \cdot \psi_1$. Ermitteln Sie auch die exakte Energieeigenfunktion des gestörten Hamiltonoperators, und verifizieren Sie, dass sie für kleine b (und kleine x) der perturbativen Funktion entspricht.

Aufgabe 14. Elektrische Suszeptibilität
Berechnen Sie die elektrische Suszeptibilität eines sich in einem Kastenpotential $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ befindenden Quantenteilchen. Nehmen Sie an, dass das Teilchen sich im Grundzustand befindet, und dass der Hamiltonoperator gegeben ist durch

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}, \qquad H' = -exE,$$

wobei E das konstante elektrische Feld bezeichnet. Skizzieren Sie die Grundzustandswellenfunktion. Schließlich greifen Sie, so weit wie möglich, das exakte Problem an.

Hinweis zum perturbativen Lösungsweg: Bestimmen Sie zunächst die Grundzustandswellenfunktion $|\tilde{0}\rangle$ perturbativ in ersten Ordnung der Störungstheorie. Danach ermitteln Sie den Erwartungswert des Dipoloperators $d = e \cdot x$ bezüglich $|\tilde{0}\rangle$ (falls nötig beschränken Sie sich auf führende Glieder).

Aufgabe 15[1]. Störung eines zwei-niveau Systems
Ein Quantensystem mit

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3$$

wird durch einen Operator

$$H' = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda\sigma_1, \qquad \lambda \ll 1$$

[1] Diese Aufgabe wird von einem Korrektor überprüft.

gestört. Berechnen Sie die Energie sowie den Grundzustandseigenvektor bis auf die Terme von der Ordnung λ^2 (einschließlich). Normieren Sie den Zustand, und bestimmen die Normierungsfunktion $Z(\lambda)$ (wieder bis zu λ^2). Verifizieren Sie die Hellmann-Feynman-Formel

$$\left\langle \frac{dH}{d\lambda} \right\rangle_{\tilde{\psi}(\lambda)} = \frac{dE}{d\lambda},$$

wobei $\tilde{\psi}(\lambda)$ die normierte Wellenfunktion, und E seine Energie bezeichnet.

Optionale Verallgemeinerung: Benutzen Sie die allgemeine Formel der Störungstheorie um den Grundzustandseigenvektor bis auf die Terme von der Ordnung λ^3 und die Energie bis zu λ^4 zu bestimmen. Weiterhin normieren Sie den Zustand, bestimmen Sie die Normierungsfunktion $Z(\lambda)$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den exakten Ausdrucken. Für exakten und störungstheoretische Eigenvektoren/Energien verifizieren Sie die Hellmann-Feynman-Formel.

Abgabe: Am Donnerstag, den 19.11.2009 in der Vorlesung.