Prof. Dr. K. Sibold
Dr. P. Marecki

Wintersemester 2009/10

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 10. Korrelationen in verschränkten Zustände

Ein 2-Teilchensystem sei im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

präpariert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer Messung der Observable $\vec{n}\vec{\sigma}$ am T1, und in einer Messung von $\vec{m}\vec{\sigma}$ am T2 gleichzeitig die Ergebnisse $+1$ zu bekommen (die Vektoren $\vec{n}$, $\vec{m}$ sind gegeben, aber beliebig zueinander orientiert).

Hinweis: Sie können die Wahrschienlichkeiten entweder aus Erwartungswerten der relevanten Projektoren, oder auch direkt aus Erwartungswerten von den Observablen ablesen.

Aufgabe 11. Quantendruck

In einem (dreidimensionalen) Kastenpotential der Breite L befinden sich N Fermionen/Bosonen[1]. Bestimmen Sie die Energie des Grundzustands in beiden Fälle. Leiten Sie diese Energie nach L ab, und überlegen Sie ob die Teilchen einen Druck auf die "Wände" des Kastens ausüben.

Aufgabe 12[2]. Zustandsgleichungen idealer Fermi-Gasen bei $T = 0$

Betrachten Sie ein ideales Fermi-Gas in einem Volumen V. Bei $T = 0$ werden alle Impuls-Zustände bis zu $p = p_f$ besetzt (Besetzungszahl $g = 2$, wegen des Spins). Aus der Normierungsbedingung

$$N = \int_V \int_{|\vec{p}| \leqslant p_f} \frac{d^3x\, d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\, g$$

bestimmen Sie eine Beziehung zwischen der Teilchendichte $n = N/V$ und p_f. Drücken Sie weiterhin für nichtrelativistische Fermionen ($E_p = \vec{p}^2/2m$) die Gesamtenergie U als Funktion von V und n aus (Relation von der Form $U = \text{const} \cdot Vn^{5/3}$ ist zu erwarten). Nutzen Sie die Relation

$$PV = \frac{2}{3}U,$$

---

[1] Wir betrachten völlig polarisierte Teilchen, also, keine zusätzliche Freiheitsgraden.

[2] Diese Aufgabe wird von einem Korrektor überprüft.

(die aus $\Omega = -PV$ im nicht-relativistischen Fall folgt) um die Zustandsgleichung (Beziehung zwischen dem Druck P und der Teilchendichte n) für nichtrelativistische, ideale Fermionen herzuleiten:

$$P = \frac{\hbar^2}{5m}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3} n^{5/3}.$$

Versuchen Sie die Ergebnisse auf ultrarelativistische ($E_p = |\vec{p}|c$) oder allgemeine ($E_p = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$) Dispersionsrelationen zu verallgemeinern.

Abgabe: Am Donnerstag, den 12.11.2009 in der Vorlesung.