
Übungen zur Quantenmechanik Aufgabenblatt 3

Aufgabe 7. Gemischte Zustände eines 2-Niveau Systems

Ein allgemeiner Zustand eines 2-Niveau-Systems (z.B. eines Spins) sei durch eine 2×2 Dichtematrix¹ ρ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + k_i \sigma^i),$$

wobei σ^i die Pauli-Matrizen bezeichnen und $|\vec{k}| \leq 1$. Zeigen Sie ferner, dass $|\vec{k}| = 1$ den reinen (Vektor-) Zuständen entsprechen, etwa $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ (normiert mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$). Untersuchen Sie das Problem der Zerlegung von gemischten Zustände auf konvexe lineare Kombination von reinen Zuständen,

$$\rho_m = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2,$$

wobei $\lambda \in (0, 1)$, und überzeugen Sie sich, dass es nicht eindeutig ist. Bestimmen Sie die ρ für $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Wie könnte man (experimentell) diesen Zustand von dem durch $\rho_0 = \frac{1}{2}\mathbf{1}$ gegebenen unterscheiden?

Aufgabe 8. Gemischte Zustände von zwei 2-Niveau Systeme

Versuchen Sie die Ergebnisse der Aufgabe 7 auf zwei 2-Niveau Systeme (der Hilbertraum ist jetzt $2 \cdot 2 = 4$ Dimensional) zu verallgemeinern. Bestimmen Sie die Dichtematrix des Vektorzustandes

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Betrachten Sie zwei Mess-Situationen in den alle Messungen am Teilchen "1" (erstes Untersystem) durchgeführt werden:

- (a) bei einer Messung des Spins entlang der z -Achse (σ_3) wurde $+\frac{1}{2}$ beobachtet²
- (b) bei einer Messung des Spins entlang der x -Achse (σ_1) wurde $+\frac{1}{2}$ beobachtet.

Charakterisieren Sie den Zustand des Gesamtsystems nach der Messung (a) bzw. (b).

Überlegen Sie zusätzlich, ob der Zustand $|\psi\rangle$ dem durch $\rho_0 = \frac{1}{2}\text{diag}(1, 0, 0, 1)$ gegebenen äquivalent ist? Wie würde man den Zustand ρ_0 interpretieren?

¹Falls einige von den in den Aufgaben verwendeten Begriffen nicht erklärt sind, sollte die standard Definition, z.B. aus der Wikipedia, genommen werden.

² $|0\rangle$ entspricht dem Eigenwert $-\frac{1}{2}$, und $|1\rangle$ dem Eigenwert $+\frac{1}{2}$ von $S_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$.

Aufgabe 9. EPR Experiment

Denken Sie über EPR Experiment nach! Dazu siehe z.B.

- arxiv.org/abs/quant-ph/9810080
- www-ece.rice.edu/~kono/ELEC565/Aspect_Nature.pdf

Abgabe: Am Donnerstag, den 5.11.2009 in der Vorlesung.