Prof. Dr. K. Sibold
Dr. P. Marecki

Wintersemester 2009/10

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 30. Wellen in 3D
Zerlegen Sie eine ebene Welle, $\psi = e^{i\vec{k}\vec{x}} = e^{ikr\cos\theta}$ in eine Linearkombination

$$\psi = \sum_{\ell m} \left[c_{\ell m} j_\ell(x) + d_{\ell m} y_\ell(x)\right] Y_{\ell m},$$

wobei $x = kr$, und $j_\ell(x)$, $y_\ell(x)$, die sphärische Bessel-Funktionen bezeichnen. Um die Zerlegung zu bestimmen, berechnen Sie explizit die Skalarprodukte $(\psi, Y_{\ell m})$ auf einer Sphäre $r = 1$ (integriert wird nur über θ und φ). Verifizieren Sie explizit, dass $d_{\ell m} = 0$, da die ebene Welle bei $r = 0$ regulär ist. Schränken Sie sich, falls nötig, zu $\ell = 0, 1, 2$. Nutzen Sie die explizite Form der sphärischen Bessel-Funktionen aus der Literatur (z.B. aus Wikipedia).

Aufgabe 31. Einfaches Streuproblem
Einlaufende Elektronen, deren Wellenfunktion eine ebene Welle ist, $\psi = e^{ikr\cos\theta}$ werden auf einer “Neumann-Sphäre” gestreut, d.h. so, dass die Randbedingung

$$\partial_r \Psi(r, \theta, \varphi)|_{r=1} = 0,$$

erfüllt ist. Hier $\Psi = \psi + \chi$, wobei χ den auslaufenden Anteil beschreibt

$$\chi = \sum_\ell a_\ell h_\ell^{(1)}(x) Y_{\ell 0},$$

mit $h_\ell^{(1)} = j_\ell + i y_\ell$. Überlegen Sie sich, wieso die sphärische Hankel-Funktionen $h_\ell^{(1)}$ den *auslaufenden* Wellen entsprechen. Bestimmen Sie die a_ℓ allgemein, und auch explizit für $\ell = 0, 1, 2$.

Sehr weit vom Streuzentrum nähert sich die exakte Wellenfunktion seiner asymptotischen Form

$$\Psi \approx \frac{2\sin(kr - \frac{1}{2}\ell\pi + \delta_\ell)}{r}$$

wobei die Streu-Phasen, δ_ℓ, Funktionen von k und ℓ sind. Bestimmen Sie die δ_ℓ für $\ell = 0, 1, 2$.

Aufgabe 32. Streuung am zylindersymmetrischen Potenzialen

Betrachten Sie eine Streuung von Teilchen am $V = V(r)$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Setzen Sie den Separationsansatz

$$\psi(\vec{x}) = e^{ipz} e^{im\varphi} f(r), \qquad p \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z},$$

in die Schrödinger-Gleichung ein und formulieren Sie das Streuproblem. Zerlegen Sie eine ebene Welle in die Funktionen von der oben gegebenen Form, und erkennen Sie die Besselfunktionen J_m und Y_m in der Zerlegung. Untersuchen Sie schließlich, als Beispiel, die Streuung am Potential

$$V = -\frac{\alpha^2}{r^2},$$

mit der Dirichlet-Randbedingung $\Psi(r_0) = 0$. Bestimmen Sie die Streu-Phasen $\delta_m(k)$.

Die Aufgaben werden in den Übungen am 4 Februar besprochen.