
Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 25. Zeitunabhängige Störungen und Phasen in der Störungstheorie¹
Betrachten Sie ein System mit

$$H_0 = \frac{E}{2}\sigma_3, \quad V = \lambda\sigma_1.$$

Bei $t = 0$ befindet sich das System im Grundzustand (von H_0). Berechnen Sie störungstheoretisch und exakt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System bei $t = T$ im angeregten Zustand zu finden². Zeigen Sie, dass die störungstheoretische Wahrscheinlichkeit zwar oszilliert in T , aber mit einer falschen Frequenz. Zeigen Sie ferner, dass die beiden Zeitentwicklungen für kleine T übereinstimmen. (Wovon hängt ab, ob man einen T als "klein" betrachten darf - welche Größe stellt eine natürliche Zeitskala des Problems dar?) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung auch in der dritten Ordnung der Störungstheorie. Zeigen Sie, dass die Übereinstimmung mit der exakten Ergebniss für kurze Zeiten besser wird, jedoch das Langzeitverhalten schnell sinnlos wird (Wahrscheinlichkeit > 1).

Aufgabe 26. Absorption der linear-polarisierten elektromagnetischen Strahlung
Ein Elektron in einem kugelsymmetrischen (S -) Zustand, deren Wellenfunktion durch

$$\psi(\vec{x}) = R(r)$$

mit einer nicht explizit gegebenen Funktion $R(r)$ gegeben ist, wird mit einer monochromatischen Welle, die entlang der z -Achse linear polarisiert ist, bestrahlt. In der sogenannten Dipolnäherung wird die Wechselwirkung durch

$$V = -zeE_0 \cos(\omega t) \cdot g(t)$$

beschrieben, wobei $g(t)$ für ein beliebiges (langsam in der Zeit variierendes) Profil der Welle steht. Benutzen Sie die erste Ordnung der zeitabhängigen Störungstheorie, um zu beantworten, zu welchen "P-Zuständen", spezifiziert durch

$$\chi(\vec{x})_m = F(r)Y_{1m}(\theta, \varphi), \quad m = -1, 0, 1$$

wird es Übergänge geben. Nehmen Sie ein, dass die Energiedifferenz der Zustände $\hbar\omega_0$ beträgt, und untersuchen Sie die Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeit von ω , E_0 und T für³ $g(t) = \Theta(t)\Theta(T - t)$.

¹Diese Aufgabe wird von einem Korrektor überprüft.

²Hinweis: $\exp(i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \omega t) = \cos(\omega t) + i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin(\omega t)$.

³Mit $\Theta(t)$ ist die Heaviside'sche Sprungfunktion bezeichnet.

Aufgabe 27. Anregungen mit Lichtpulsen - Störungstheoretisch

Ein Zwei-Niveau-System werde mit einem elektromagnetischen Wellenpaket bestrahlt. Die Wechselwirkung wird näherungsweise durch

$$H = \frac{E}{2}\sigma_3 + f(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \exp(-iEt) \\ \exp(iEt) & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben, wobei

$$f(t) = \frac{\alpha\beta}{1 + \beta^2 t^2}.$$

Nehmen Sie an, dass sich das System asymptotisch bei $t \rightarrow -\infty$ im Grundzustand befand, und berechnen Sie im ersten Ordnung der (zeitabhängigen) Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, das System asymptotisch bei $t \rightarrow \infty$ im angeregten Zustand zu finden. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung (siehe QM1-Aufgaben 34-36).

Abgabe: Am Freitag, den 15.01.2010 in der Vorlesung.