Prof. Dr. K. Sibold
Dr. P. Marecki

Wintersemester 2009/10

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 (Winkeloperator in der Quantenmechanik)
Betrachten Sie den Drehimpulsoperator in einer 2D-Ebene,

$$J = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

und zeigen, Sie dass als eine Konsequenz der Periodizität der Wellenfunktionen ($\varphi = 2\pi$ äquivalent zu $\varphi = 0$) die Eigenwerte von J ganzzahlig sind. Zeigen Sie ferner, dass die Existenz eines (kanonischen) Winkeloperators $\hat{\varphi}$ mit

$$[\hat{\varphi}, J] = i\hbar$$

zu Widersprüchen führt.

Aufgabe 2 (Wellen auf der Wasseroberfläche)
Ein Objekt bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v auf der Wasseroberfläche, und erzeugt damit ein stationäres Wellenbild (in seinem Ruhsystem). Je nachdem ob das Wasser tief oder seicht ist, gibt es verschiedene Dispersionsrelationen.

- Im Fall des seichten Wassers (d.h. $kH \ll 1$, wobei k den Wellenwektor bezeichnet und H die mittlere Tiefe des Wassers), auf dem die Oberflächenwellen die Dispersionsrelation $\omega(k) = k\sqrt{gH}$ erfüllen (g ist die Erdbeschleunigung). Die Gruppengeschwindigkeit v_g und Phasen-Geschwindigkeit v_p stimmen hier also überein. Sei jetzt $v > v_g$. Überlegen Sie qualitativ, wieso die Wellen nur in einem Keil hinter dem Objekt erzeugt werden, dessen Öffnungswinkel α eine Funktion des Verhältnisses v/v_g ist[1].

- Sei jetzt die Tiefe groß; die erzeugten Wellen erfüllen in diesem Fall[2] $\omega(k) = \sqrt{kg}$. Die Gruppengeschwindigkeit beträgt also nur die Hälfte der Phasengeschwindigkeit, und

[1] Dieses Wellenbild ist zu erwarten, wenn die Dispersionsrelation von der Form $\omega(k) = k \cdot \text{const}$ ist. Das ist der Fall auch für Photonen (Lichtwellen) und Phononen (Schallwellen in verschiedenen homogenen Medien). Das hier auftretende Ereignis ist als Tscherenkow-Strahlung bekannt.

[2] Allgemein gilt für Oberflächewellen $\omega^2(k) = gk \tanh(kH)$.

außerdem *die beiden Geschwindigkeiten hängen jetzt von der Wellenlänge ab*. Versuchen Sie zu argumentieren (qualitativ), dass die Wellen mit $v_g < v$ im wesentlichen in einem Keil erzeugt werden, dessen Öffnungswinkel $\sin\beta = 1/3$ erfüllt. *Dieser Winkel soll also unabhängig von v sein!* Skizzieren Sie qualitativ die erwartene Orientierung der Wellenfronten der Wellen auf der Keilkante vergleichen Sie dies mit Bildern des Kelvin-Kielwassers (eng. "Kelvin wake").

Hinweis: Untersuchen Sie z.B. die Ausbreitung von Wellen mit drei verschiedenen Wellenlängen.

Aufgabe 3 (Plötzliche Änderung eines harmonischen Potenzials)
Ein harmonisches Potential $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (wir setzen $m = 1 = \hbar$) würde plötzlich geändert, z.B. durch $k \to \alpha^4 k$. Weisen Sie nach, dass der neue Vernichtungsoperator, $\tilde{a}$,

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha x + \frac{ip}{\alpha}\right), \tag{1}$$

erfüllt. Versuchen Sie die alte Grundzustandswellenfuktion ψ_0 in die neuen Eigenfunktionen des modifizierten Hamiltonoperators.

Hinweis: Die neuen Eigenfunktionen, $\tilde{\psi}_n$ werden aus der neuen Grundzustandsfunktion $\tilde{\psi}_0$ durch eine sukzessive Anwendung der (neuen) Erzeugungsoperatoren $\tilde{a}^*$ gewonnen. Gesucht ist also die Entwicklung

$$\psi_0 = \sum_n c_n \tilde{\psi}_n, \tag{2}$$

wobei (offensichtlich) beide Seiten durch die Anwendung von a annihiliert werden (und a hängt linear von $\tilde{a}$ und $\tilde{a}^*$) .

Abgabe: Am Donnerstag, den 22.10.2009 in der Vorlesung.