UNIVERSITÄT LEIPZIG, ITP

Quantenmechanik II, WS2009/2010

Sonderübungsblatt 1: Musterlösungen

Aufgabe S1)

Unter Verwendung der in der Aufgabe 19(b) eingeführten Bezeichnungen lassen sich die von Laughlin benutzte Zustände als

$$|mn\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{m!n!}} e^{z\overline{z}/2} \, \overline{\partial}^m \partial^n e^{-z\overline{z}}$$

schreiben[1]. Bei den von uns verwendeten Erzeugungs-/Vernichtungs-Operatoren führen wir ein Vorzeichenwechsel durch, sodass ab hier

$$\begin{aligned} b &= -\partial - \overline{z}/2, \\ b^* &= \overline{\partial} - z/2. \end{aligned}$$

Die neuen Operatoren genügen den gleichen Vertauschungsrelationen, und Operatoren quadratisch in b (z.B. $K = -i\partial_\varphi = b^*b - a^*a$) bleiben unverändert. Man sieht jetzt leicht, dass $|m0\rangle_L = |m0\rangle$ und $|0n\rangle_L = |0n\rangle$, wobei

$$|mn\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n!}} (b^*)^m (a^*)^n |00\rangle,$$

mit $|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z\overline{z}/2}$. Nun wegen

$$(\partial - \overline{z}/2) e^{z\overline{z}/2} f(z, \overline{z}) = e^{z\overline{z}/2} f(z, \overline{z})$$

folgt, dass

$$a^* |mn\rangle_L = \sqrt{n+1} |m\, n+1\rangle_L,$$

d.h. die von Laughlin verwendete Zustände stimmen mit den von a^* und b^* erzeugten exakt überein. Sie sind Eigenzustände von H und K, nicht jedoch von dem Drehimpuls $J = X\Pi_Y - Y\Pi_X = K - z\overline{z}$.

[1] Man beachte, dass das Magnetfeld von Laughlin ist $\vec{B} = -H_0 \hat{z}$. Um diese Konvention zu berücksichtigen (z.B. um unseren Hamiltonoperator zu bekommen) muss $y \to -y$ durchgeführt werden; dies ist äquivalent zu $z \to \overline{z}$ (also $\overline{\partial} \leftrightarrow \partial$ in der Formel (3) in [L83] für $|mn\rangle_L$). Die Energie der Zustände $|mn\rangle_L$ wird dann $n + \frac{1}{2}$, also gleich der Energie von den hier betrachteten $|mn\rangle$.

Aufgabe S2)

Wegen $r^2 = X^2 + Y^2 = 2z\overline{z}$, mit $z = b^* - a$ folgt

$$(|m0\rangle, r^2|m0\rangle) = 2(m+1).$$

Zur Berechnung des Erwartungswerts von $1/r$ wird die explizite Form

$$|m\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |m0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-z)^m e^{-z\overline{z}/2}}{\sqrt{m!}}$$

Es gilt

$$\langle m|\tfrac{1}{R}|m\rangle = 2\int dxdy\, \frac{(z\overline{z})^m}{2\pi m!}\, e^{-z\overline{z}}\, \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Mit $z = x + iy$, $x = X/\sqrt{2}$ folgt

$$\langle m|\tfrac{1}{R}|m\rangle = \frac{\sqrt{2\pi}(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2}.$$

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel, $n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ wird die Näherung $\langle m|\frac{1}{R}|m\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2m}}$ leicht bewiesen.

Aufgabe S3)

Zunächst betrachten wir die Situation ohne des Vektorpotentials, und noch zusätzlich in einer Dimension. Ursprünglich gibt es zwei Variablen, x_1, x_2 (weil wir ein System von zwei Teilchen betrachten). Wir führen

$$\begin{aligned} u =& (x_1 + x_2)/2, \\ v =& (x_1 - x_2)/\sqrt{2}, \end{aligned}$$

ein. Es gilt $\partial_1 \equiv \partial/\partial x_1 = \frac{1}{2}\partial/\partial u + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial/\partial v$. Aus

$$H = -\frac{1}{2m}\left[(\partial_1)^2 + (\partial_2)^2\right]$$

wird

$$H = -\frac{1}{4m}(\partial_u)^2 - \frac{1}{2m}(\partial_v)^2,$$

d.h. bezüglich der v-Koordinate hat das System ein Charakter eines freien Teilchens der Masse m (bzgl. u ist die Masse $2m$). In den Skalarprodukten wird das Maß dx_1dx_2 durch $\sqrt{2}dudv$ ersetzt. Die Verallgemeinerung auf zwei Teilchen in zwei räumlichen Dimensionen ist klar,

$$H = -\frac{1}{4m}\nabla_u^2 - \frac{1}{2m}\nabla_v^2.$$

Die Koordinate u hat hier zwei Komponenten, die wir mit u_x und u_y bezeichnen, $\vec{u} = (u_x, u_y)$ (und analog für $\vec{v}$). Im Falle der Teilchen in Magnetfeldern muss noch das Vektorpotential transformiert werden. Zunächst ist der Hamiltonoperator des ersten Teilchen

$$H_1 = \frac{1}{2m} \delta^{ij} (-i\partial_i^1 - \tfrac{e}{c} A_i^1)(-i\partial_j^1 - \tfrac{e}{c} A_j^1), \qquad i, j = 1, 2$$

wobei $\partial_i = \partial/\partial x_1^i$, und $A_i^1 = A_i^1(\vec{x}_1)$ (wir werden auch die etwas verwirrende Notation $\vec{x}_1 = (x_1, y_1)$ verwenden). Nun gilt die folgende Transformationsregel

$$A_i^1 = \frac{\partial u^j}{dx_1^i} A_j^u + \frac{dv^j}{dx_1^i} A_j^v = A_i^u + \frac{1}{\sqrt{2}} A_i^v,$$

wobei wenn wir $\vec{A}^1 = \alpha(-y_1, x_1)$ nehmen (und analog für $\vec{A}^2$), dann

$$\vec{A}_j^u = \frac{\partial x_1^i}{\partial u^j} A_i^1 + \frac{\partial x_2^i}{\partial u^j} A_i^2,$$

und explizit

$$\begin{aligned} A_j^u &= 2\alpha(-u_y, u_x), \\ A_j^v &= \alpha(-v_y, v_x). \end{aligned}$$

Zu beachten ist der glückliche Sachverhalt, das $A^u = A^u(\vec{u})$ (allgemein wäre $A^u = A^u(\vec{u}, \vec{v})$). Schließlich erhalten wir den Hamiltonoperator

$$H = H_1 + H_2 = H_u + H_v,$$

mit

$$H_u = \frac{1}{4m} (-i\partial^u - \tfrac{e}{c} A^u(\vec{u}))^2, \qquad H_v = \frac{1}{2m} (-i\partial^v - \tfrac{e}{c} A^v(\vec{v}))^2.$$

Effektiv lässt sich jetzt das Problem interpretieren als die Bewegung eines Teilchens der Masse $M = 2m$ und Ladung $Q = 2e$ (Schwerpunktbewegung) und (unabhängig) eines Teilchens der Masse $m = m$ und Ladung $e = e$ (Relativbewegung) im dem ursprünglichen Magnetfeld.

Eine eventuelle Wechselwirkung der Teilchen, z.B. durch $H_I = \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{v}|$ gegebene, spielt nur für die Relativbewegung eine Rolle. Die Antisymmetrie der (fermionischen) Wellenfunktion $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \Psi(\vec{u}, \vec{v})$ wird durch $\Psi(\vec{u}, -\vec{v}) = -\Psi(\vec{u}, \vec{v})$ erreicht (und, falls wir Tensorproduktwellenfunktionen $\Psi(\vec{u}, \vec{v}) = \chi(\vec{u}) \otimes \psi(\vec{v})$ betrachten, muss χ symmetrisch und ψ antisymmetrich genommen werden). Das Maß ist jetzt $\sqrt{2}^3\, d^3u\, d^3v$.

Wir erhalten also ein Bild, in dem das Teilchensystem (Schwerpunktbewegung) sich als ganze als im Landau-Problem verhält, und in dem die Relativbewegung vielleicht immer noch nur diskrete Energien besitzt (wegen dem globalen Magnetfeld).

Aufgabe S4)

Die Schrödinger-Gleichung der Relativbewegung, $H_v\psi = E\psi$ lautet

$$\frac{1}{4}\left[(-i\partial_x + y)^2 + (-i\partial_y - x)^2\right]\psi + \frac{\beta}{2r}\psi = E\psi,$$

(wir nutzen die reskalierten dimensionslosen Variablen, $r = R/\sqrt{2}$; die dimensionslose Konstante β ist gegeben durch $\beta = e^2/\hbar\omega_c a_0 \sim B^{-1/2}$ und wird kleiner für starkere Magnetfelder; die Energien E sind in dimensionslos (in Einheiten von $\hbar\omega_c$ gegeben)). Ohne der Coulomb-Wechselwirkung sind die Grundzustände einfach gegeben durch

$$|m0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi m!}}(-z)^m e^{-z\overline{z}/2},$$

und hängen via $e^{im\varphi}$ vom φ ab. Das Schrödinger-Problem lässt sich also für jedes m separat formulieren, wobei in Anwesenheit der Coulomb-Wechselwirkung wird die Entartung der Grundzustandsenergie aufgehoben, und der Grundzustand ist der mit der niedrigster Eigenwert $E = E_m$. Ein Ansatz $\psi = e^{im\varphi}\chi(r)$ führt auf

$$\left[-\frac{1}{4}\left(\partial_r^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r - \tfrac{m^2}{r^2} + r^2\right) - \frac{m}{2} + \frac{\beta}{2r}\right]\chi = E\psi.$$

In dem Sektor eines festen m handelt es sich damit um eine zeitunabhängige Störung (Störungsparameter β) eines energetisch nicht-entarteten Niveaus. In der Laughlin's Arbeit werden die ungestörten Wellenfunktionen $|m0\rangle$ mit den exakten Lösungen der Schrödinger-Gleichung zu $\beta = 1$ verglichen. Die erste Korrektur zur Energie des $|m0\rangle$ Zuständs beträgt:

$$\frac{\beta}{\sqrt{2}}\langle m0|\tfrac{1}{R}|m0\rangle \sim \frac{\beta}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2m}} \quad \text{(für große } m\text{).}$$