UNIVERSITÄT LEIPZIG, ITP

Quantenmechanik II, WS2009/2010

Übungsblatt 7: Musterlösungen

Aufgabe 19a) Landau Problem; $\vec{A} = (0, B \cdot x, 0)$

Zunächst werden dimensionslose Koordinaten einzuführt. Mit $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ (Zyklotronfrequenz) und $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$ (magnetische Länge)[1] sind die Koordinaten

$$\tilde{x}^i = x^i / a_0$$

dimensionslos (wir schreiben weiter x^i anstelle von $\tilde{x}^i$). Nun ist $H/\hbar\omega_c$ auch dimensionslos:

$$H/\hbar\omega_c = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(-i\partial_y - x)^2,$$

(Im Folgenden wird statt $H/\hbar\omega_c$ kurz H verwendet.)

Wegen der y-Unabhängigkeit von H wird der Ansatz

$$\psi = e^{iky} f(x),$$

eingesetzt; wir erhalten

$$Hf = -f''/2 + \frac{1}{2}(x_0 - x)^2 f = Ef.$$

Offensichtlich die noch zu lösen bleibende Differentialgleichung ist zu einer Gleichung eines um $x_0 = k$ verschobenen harmonischen Oszillator äquivalent. Wir führen die verschobene Koordinate $\underline{x} = x - x_0$ und den Vernichtungsoperator

$$a = \frac{\underline{x} + ip_{\underline{x}}}{\sqrt{2}}$$

Wir finden, dass bei einer festen Wert von k gibt es abzählbar viele Zustände zu den Energien

$$E_n = n + 1/2$$

mit den Wellenfunktionen

$$f_n(\underline{x}) = \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} f_0(\underline{x})$$

[1] Für B =1T= $3{\cdot}10^4 \frac{ecu}{cm^2}$ ist $a_0 \approx 1.4{\cdot}10^{-6}$cm; für Elektronen in GaAs ($m^* = 0.07 m_e$) bei B =1T finden wir $\omega_c \approx 7{\cdot}10^{14}$Hz.

wobei die Grundzustandswellenfunktion ist aus $af_0 = 0$ zu finden[2],

$$f_0(\underline{x}) = \pi^{-1/4} e^{-(x-x_0)^2/2}.$$

Jedes Niveau ist unendlich entartet (die Energie hängt *nicht* von $k \in \mathbb{R}$ ab). Insgesamt die Wellenfunktionen haben die Form

$$F_n^k(x) = e^{iky} f_n(x-k), \tag{1}$$

wobei $f_n(x)$ die Wellenfunktion des $n-$en Niveau eines harmonischen Oszillators bezeichnet.

Zur Erläuterung der Interpretation der Zustände bemerken wir, dass:

- Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines sich im Zustand F_n^k befindenden Teilchens ist wesentlich um $x = x_0 = k$ lokalisiert und ist homogen in der y-Richtung.

- Der Wahrscheinlichkeitsstrom in der $x-$Richtung

  $$j_x = \frac{1}{2m}\,(\overline{\psi}\Pi_x\psi + \overline{\Pi_x\psi}\psi),$$

  verschwindet wegen $\Pi_x = p_x = -i\partial_{\underline{x}}$ und $f_n(\underline{x}) \in \mathbb{R}$.
  In der y-Richtung erhalten wir

  $$j_y = \frac{\hbar}{2a_0 m}(\overline{\psi}(-i\partial_y - x)\psi + \overline{(-i\partial_y - x)\psi}\psi) = -(x-x_0)|f_n(\underline{x})|^2 \cdot \frac{\hbar}{a_0 m}.$$

  Dieser Strom ist positiv für $x < x_0$ und negativ für $x > x_0$. Wahrscheinlichkeitsstrome, multipliziert mit der Ladung der Teilchen und mit der mittleren Dichte der Teilchen, entsprechen den tatsächlich fließenden elektrischen Strömen (solange die Teilchen als miteinander nicht wechselwirkend angenommen werden können). Dies ist überraschend, denn im klassischen Fall sind die Bahnkurven der freien Teilchen gebunden (Kreise) - und damit tragen keinen mittleren elektrischen Strom.

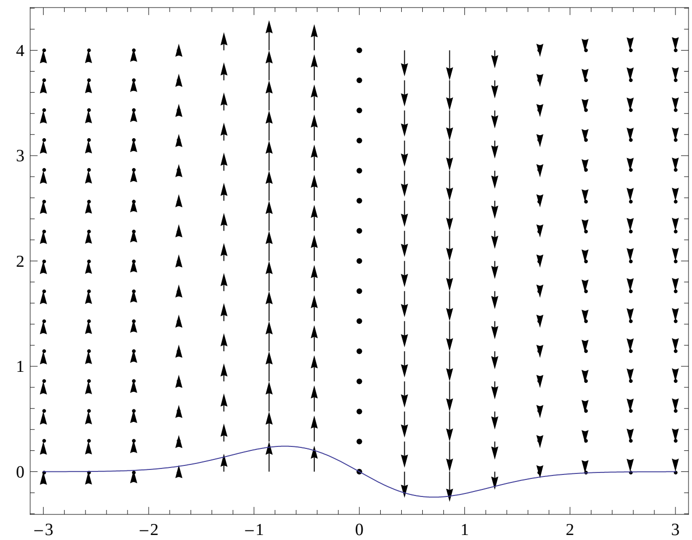

Abb. 1. Wahrscheinlichkeitsstrome im Grundzustand.

[2] Zu einer richtigen Normierung muss die Funktion noch mit $(a_0)^{-1}$ multipliziert werden, denn der Skalarprodukt hat die Form $(\psi, \psi) = \int a_0^2\, dxdy |\psi(x,y)|^2$, wobei hier x, y dimensionslos sind.

19(b) Landau Problem für $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$

In den (hier mit X, Y bezeichneten) dimensionslosen Koordinaten gilt[3]

$$H = \frac{1}{2}\left[\left(-i\partial_X + \frac{Y}{2}\right)^2 + \left(-i\partial_Y - \frac{X}{2}\right)^2\right], \tag{2}$$

und $\vec{A} = \frac{B}{2}(-Y, X, 0)$. Zur Vereinfachung der folgenden algebraischen Lösung führen wir einen Satz von reskalierten Koordinaten ein,

$$\begin{aligned} x =& X/\sqrt{2}, \\ y =& Y/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$H = \frac{1}{4}\left[(-i\partial_x + y)^2 + (-i\partial_y - x)^2\right]. \tag{3}$$

Nun führen wir $z = x + iy$, und

$$\begin{aligned} \partial &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \\ \overline{\partial} &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \end{aligned}$$

sodass die Operatoren

$$\begin{aligned} a &= -\overline{\partial} - z/2 & \qquad b &= \partial + \overline{z}/2 \\ a^* &= \partial - \overline{z}/2 & \qquad b^* &= -\overline{\partial} + z/2. \end{aligned}$$

die Vertauschungsrelationen $[a, a^*] = 1$, $[b, b^*] = 1$, $[a, b] = 0 = [a, b^*]$ erfüllen, d.h. a, b und a^*,b^* verhalten sich wie unabhängige Vernichtunsg-/Erzeugungs-Operatoren. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} K &\stackrel{\text{def}}{=} -i\partial_\varphi = z\partial - \overline{z}\overline{\partial} = (b^*b - a^*a), \\ H &= a^*a + \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass in dem Hamiltonoperator treten *keine* von den Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren zweiter Art (b, b^*) auf. Der b^* erzeugt damit Anregungen, die überhaupt nicht zur Energie beitragen.

Wie im Falle eines harmonischen Oszillator muss es einen Zustand[4] ψ geben mit $a\psi = 0$.

---

[3]Hier ist wieder $H/\hbar\omega_c$ gemeint.

[4]Sei $a^*a\phi = c\phi$; dann $a^*a\,a\phi = (c-1)a\phi$, d.h. der Zustand $a\psi$ ist auch ein Eigenzustand von a^*a jedoch zum Eigenwert $c - 1$. Nun der Operator a^*a ist offensichtlich positiv, woraus folgt unmittelbar, dass es einen Zustand ψ geben muss, der durch a vernichtet sein soll, $a\psi = 0$.

Die Wellenfunktion dieses Zustands erfüllt

$$-a\psi = \partial_{\overline{z}}\psi + z/2\psi = 0.$$

Wenn wir diese Gleichung als eine partielle Differentialgleichung betrachten (d.h. z und $\overline{z}$ als unabhängige Variablen betrachten) so ergibt sich allgemein

$$\psi = g(z)e^{-z\overline{z}/2},$$

wobei $g(z)$ für eine beliebige analytische Funktion von z steht. Wir bemerken, dass die Beliebigkeit der Funktion $g(z)$ genau der Entartung der Energiezustände entspricht. Man sieht nämlich sofort, dass die Anwendung von b^* auf ψ gleichbedeutend mit einer Multiplikation von ψ mit z ist. Sei $g^{(n)}$ die n-te Ableitung von $g(z)$ am $z = 0$, dann gilt

$$g(z)e^{-|z|^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}}{n!}(b^*)^n e^{-|z|^2/2},$$

d.h. $g(z)e^{-|z|^2/2}$ (die allgemeine Form des Grundzustandes ψ) kann als eine Überlagerung der Zustände $(b^*)^n e^{-|z|^2/2}$ verstanden werden. Wegen

$$-i\partial_\varphi = z\partial - \overline{z}\overline{\partial} = (b^*b - a^*a)$$

folgt, dass das Spektrum von b^*b diskret sein muss (die Wellenfunktionen mussen periodisch bzgl. φ sein). Wie im Fall von a^*a ist b^*b ein positiver Operator und b erniedrigt der Wert dieses Operators um 1, also muss es einen von Zustand geben, der von b vernichtet wird. Man sieht leicht, dass bereits ψ mit $g(z) = 1$ einen solchen Zustand liefert. Wegen der Skalierung muss jeder Bindungszustand mit Hilfe von $2 \cdot \int dxdy|\psi|^2 = 1$ normiert werden. Wir definieren den Grundzustand

$$|00\rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|z|^2/2} \tag{4}$$

und die normierten angeregten Zustände

$$|mn\rangle = \frac{(a^*)^n(b^*)^m}{\sqrt{n!m!}}|00\rangle, \qquad m \geq 0,\ n \geq 0.$$

Der Zustand $|00\rangle$ wird von a sowie von b vernichtet. Die Zustände $|mn\rangle$ sind Eigenzustände von K zum Eigenwert $m - n$ und entsprechen den Energien $E_{mn} = n + 1/2$.

Die Ströme diskutiert man am besten in dem man die radiale und azimutale Komponenten berechnet. Zur Vereinfachung werden dimensionslose Strome verwendet, d.h. $j/(\frac{\hbar}{a_0 m})$. Es gilt

$$\partial_\varphi = -Y\partial_X + X\partial_Y, \qquad j_X = \frac{1}{2m}(\overline{\psi}\Pi_X\psi + \overline{\Pi_X\psi}\psi),$$

und

$$\Pi_X = -i\partial_X + \frac{Y}{2}, \qquad \Pi_Y = -i\partial_Y - \frac{X}{2}$$

findet man

$$j_\varphi = -Y j_X + X j_Y = \frac{-i}{2}[\overline{\psi}\partial_\varphi\psi - \overline{\partial_\varphi\psi}\psi] - \frac{1}{2}(X^2+Y^2)|\psi|^2.$$

Nun $(X^2+Y^2)/2 = x^2+y^2 = z\overline{z} = (b^*-a)(b-a^*)$, d.h.

$$j_\varphi = \frac{1}{2}\left[\overline{\psi}K\psi + \overline{K\psi}\psi\right] - \overline{\psi}\left[b^*b + a^*a + 1\right]\psi,$$

mit $K = -i\partial_\varphi = b^*b - a^*a$.

Der dem Zustand $\psi = |mn\rangle$ entsprechende Strom ist[5], wegen $b^*b|mn\rangle = m|mn\rangle$, $a^*a|mn\rangle = n|mn\rangle$, gegeben durch

$$j_\varphi^{mn} = -2\left[n+\tfrac{1}{2}\right]|\psi|^2.$$

Es ist bemerkenswert dass dieser Strom überall negativ ist, und damit der klassischen Zirkulation der Ladungen entspricht. Die Abbildunen 2 zeigt die Ströme für $|10\rangle$ und $|70\rangle$.

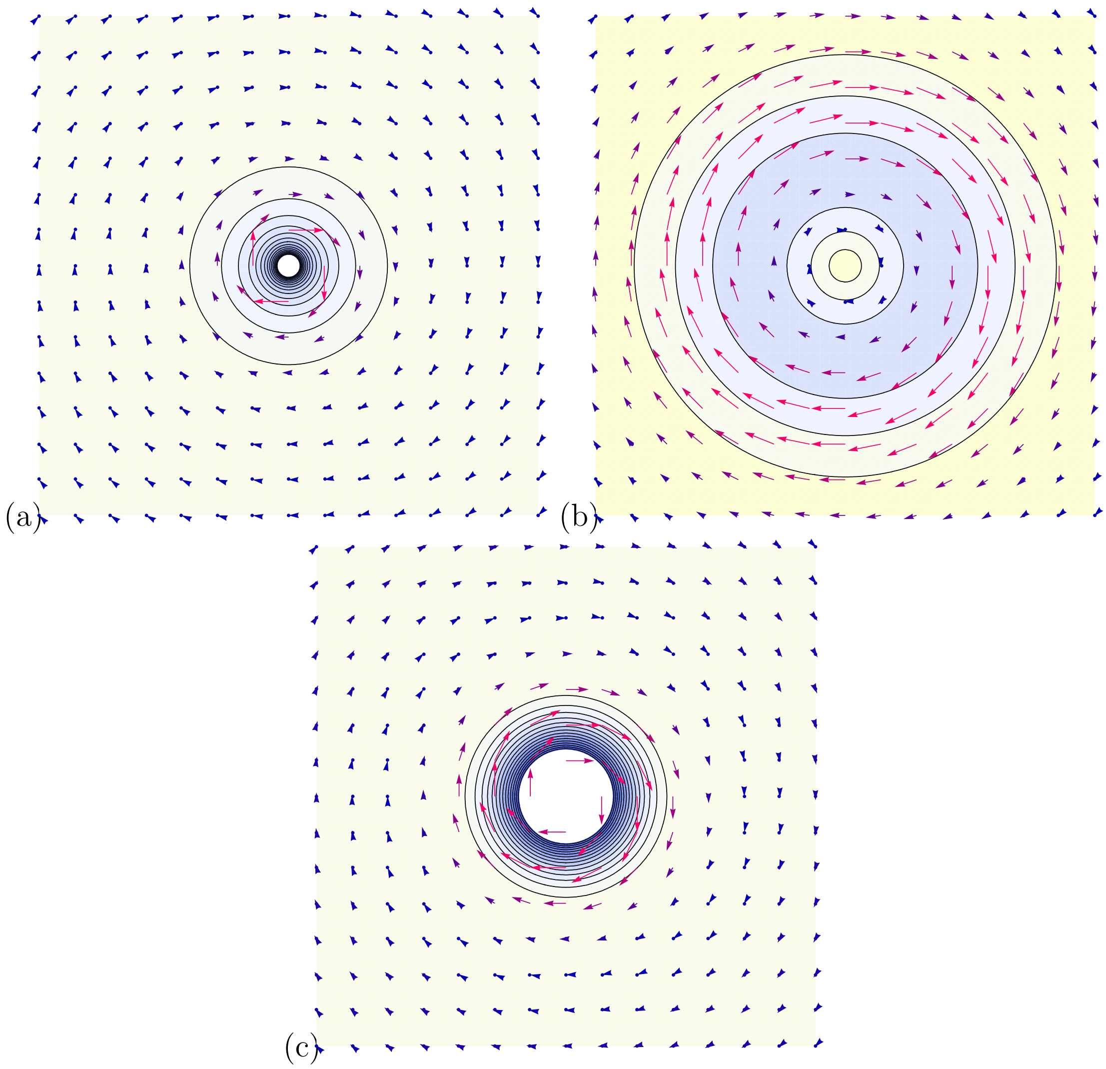

Abb. 2. Quantenmechanische Ströme[6] j_φ, zu den Zustände $|00\rangle$, $|20\rangle$ und $|21\rangle$.

[5]Die radiale Komponente des Stroms verschwindet.

[6]In den Fällen (a) und (c) gilt $j_\varphi \to const$ als $r \to 0$. Ein Verktorfeld mit dieser Eigenschaft ist *singulär* bei $r = 0$, als die "Länge" eines azimutalen Vektors ist gegeben durch $|\vec{j}| = \frac{1}{r}|j_\varphi|$.

Man beachte, dass aus den Strömen lässt sich die Erwartungswert des Drehimpulses in der z-Richtung sofort ablesen,

$$\langle J_z \rangle_{mn} = \langle X\Pi_Y - Y\Pi_X \rangle_{mn} = \int dX dY \, j_\varphi^{mn} = -(2n+1).$$

Klassische Lösung Aus der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{e}{c}A_i v^i$$

folgen die Bewegungsgleicungen:

$$\frac{d}{dt}[v_x + \omega_c y] = 0,$$
$$\frac{d}{dt}[y_x - \omega_c x] = 0.$$

Die Lösungen hängen von vier Parameter, x_0, y_0, t_0, R, ab:

$$x = x_0 + R\cos[\omega_c(t - t_0)]$$
$$x = y_0 - R\sin[\omega_c(t - t_0)]$$

und beschreiben eine zirkulation von Teilchen in der negativen Richtung.