UNIVERSITÄT LEIPZIG, ITP

Quantenmechanik II, WS2009/2010

Übungsblatt 4: Musterlösungen

Aufgabe 10

Im $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ haben die Observablen $\vec{m}\vec{\sigma}$ nur zwei Eigenvektoren, und nur zwei Eigenwerte, ± 1. Die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung im Zustand ψ das Ergebnis $+1$ zu bekommen ist gegeben durch

$$W_+ = \langle \psi | P_+ | \psi \rangle, \qquad P_+ = |\psi_+\rangle\langle\psi_+|$$

(P_+ ist ein Projektor auf den Eigenvektor zu $+1$, ψ_+). Es kann leicht gezeigt werden, dass

$$W_\pm = \tfrac{1}{2}\langle \psi | \mathbf{1} \pm \vec{m}\vec{s} | \psi \rangle.$$

Sei $E_m = (\mathbf{1} + m\vec{\sigma})$. Für Wahrscheinlichkeit der Koinzidenz der $+1$ Ergebnisse bei den Messungen von $\vec{m}\vec{\sigma}$ und $\vec{n}\vec{\sigma}$ am $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ finden wir

$$W_{++} = \frac{1}{8}\,\left[\langle 00|E_m E_n|00\rangle + \langle 11|E_m E_n|11\rangle + \left(\langle 00|E_m E_n|11\rangle + c.c.\right)\right].$$

Die Matrixelemente von E_m im $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ sind gegeben durch

$$E_m \equiv \begin{pmatrix} 1 + m_3 & m_1 - im_2 \\ m_1 + im_2 & 1 - m_3 \end{pmatrix}.$$

Wir finden

$$W_{++} = \frac{1}{4}\,[1 + m_1 n_1 - m_2 n_2 + m_3 n_3]\,.$$

Betrachten wir W_{++} als eine Funktion von $\vec{n}$, $\vec{m}$ mit der Nebenbedingung $|\vec{m}| = 1 = |\vec{n}|$, so ergibt sich, dass W_{++} ein Maximum $= 1/2$ für die Orientierungen

$$m_1 = n_1, \qquad m_3 = n_3, \qquad m_2 = -n_2$$

hat. Die Asymmetrie des Ergebnisses ist durch den Zustand ψ bedingt.

Aufgabe 11

Das Problem wird sofort auf drei eindimensionale Probleme separiert, für die man die folgenden Wellenfunktionen

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x) \qquad \text{mit } k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

mit den Energien

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m\,L^2}\,n^2$$

findet. In dem bosonischen Grundzustand ψ_B sind alle Teilchen im 1-Teilechn-Grundzustand, d.h.

$$\Psi_B(x_1,\ldots,x_N) = (\psi_1)^{\otimes N}\,.$$

Die Energie ist

$$E_B = NE_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\,\frac{1}{L^2}\,N.$$

Sie fällt mit wachsendem L, also die Teilchen üben auf die Wände einem zu N proportionalen, positiven Druck.

Im fermionischen Fall werden alle 1-Teilchen-Niveaus, nummeriert durch $\vec{n} \in \mathbb{N}_+^3$, bis zu einem Festen $|\vec{n}| = R$ besetzt. Es sei N sehr groß. Im $\mathbb{N}_+^3$ ist die Dichte der Zustände $= 1$; gäbe es einem kontinuierlichen Verteilung mit der gleichen Dichte, so würde es folgen

$$N = \frac{1}{8}\int_0^R 4\pi r^2 dr = \frac{\pi R^3}{6},$$

also $R = (6N/\pi)^{1/3}$. Es ist intuitiv klar, dass für sehr große N die diskrete und die kontinuierliche Beschreibungen dass selbe ergeben sollen; wir rechnen daher weiter mit der kontinuierlichen $\vec{n}$. Die zu $\vec{n}$ gehörige 1-Teilchen-Energie ist

$$E_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\,\vec{n}^2,$$

und damit finden wir die folgende Energie des fermionischen N-Teilchen-Zustandes:

$$E_G = \frac{\hbar^2\pi^2}{16mL^2}\int_0^R 4\pi r^2 dr\, r^2 = \frac{\hbar^2\pi^3}{20mL^2}\,(6N/\pi)^{5/3}.$$

Diese Energie wächst mit N, und damit auch der Druck, viel schneller im fermionischen als im bosnischen Fall. Assoziiert man mit $-\partial_L E_G = F$ die (von den Fermionen ausgeübte) auf die Wände wirkende Kraft, so ist der Druck $p = F/L^2$ proportional zu $(N/L^3)^{5/3}$ also zu $n^{5/3}$ (siehe Aufgabe 12).

Aufgabe 12

(Im folgenden werden $\frac{1}{h^3}d^3x\,d\theta d\varphi$-Integrale immer trivial, und gleich $V\gamma$, mit $\gamma = \frac{4\pi g}{h^3}$.) Bei $T = 0$ sind alle Fermionische Energieniveaus bis zu $E = E_f$ besetzt. Im unseren Fall hängt die Energie nur vom $p = |\vec{p}|$ ab. Mit p_f bezeichnen wir den der E_f entsprechenden Impuls (Fermiimpuls). Es gilt

$$N = \int_{p\leqslant p_f}\frac{d^3x\,d^3p}{h^3} = Vg\,\frac{p_f^3}{3},$$

und damit

$$p_f = (3n/\gamma)^{1/3}, \qquad n = N/V$$

unabhängig davon, welche Dispersionsrelation $E = E(p)$ gelten soll. Die mittlere Energie U, im Falle von $E = p^2/2m$, ist eifach zu bestimmen,

$$U = \int n_F(p)E(p) = \int_{p \leqslant p_f} \frac{d^3x\, d^3p}{h^3} \frac{p^2}{2m} = V\gamma \frac{p_f^5}{10m}$$

Die thermische Zustandsgleichung ist, unter Verwendung von $P = \frac{2}{3}U/V$, leicht herzuleiten. Wir finden

$$P = \frac{\gamma}{15m} \left(\frac{3n}{\gamma}\right)^{5/3}.$$

Diese Zustandsgleichung beschreibt natürlich nur die Isotherme $T = 0$ der vollständigen thermischen Zustandsgleichung $P = P(n, T)$ der nichtrelativistischen wechselwirkungsfreien Fermionen. In guter Näherung erfüllen die Elektronen in Weißen Zwergen, die Neutronen in Neutronensternen, sowie die Neutronen in großen Atomkernen diese Zustandsgleichung. Obwohl die Temperatur in diesen Systemen (absolut gesehen) gigantisch ist, wird die Näherung $T = 0$ eigentlich gut solange $k_B T \ll E_f$. Diese Bedingung ist in den oben genannten Systemen oft erfüllt.

Zur Vervollständigung unserer Überlegungen leiten wir hier noch die Relation $PV = \frac{2}{3}U$, sowie die Form der Zustandsgleichung für $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ (allgemeine massive Teilchen). Zunächst gilt bei beliebigen Temperaturen

$$U = V\gamma \int_0^{p_f} p^2 dp \, \frac{E(p)}{e^{-\beta\mu} e^{\beta E(p)} + 1},$$

anderseits im Falle von nichtwechselwirkenden Fermionen finden wir per Definition

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\frac{1}{\beta} V\gamma \int_0^{p_f} p^2 dp \, \ln(1 + e^{\beta[\mu - E(p)]}).$$

Integrieren wir diese Gleichung partiell, so ergibt sich

$$-\Omega = V\gamma \int_0^{p_f} p^2 dp \, \frac{1}{3} p \partial_p E(p) \cdot \frac{1}{e^{-\beta\mu} e^{\beta E(p)} + 1}$$

Aus der thermodynamischen Identität $\Omega = -PV$ folgen, im Fall von homognen Dispersionsrelationen,

$$E(p) = \alpha p^\ell$$

einfache, zu allen T geltende, Beziehungen von dem Typ

$$PV = \frac{\ell}{3} U.$$

Es sei jetzt $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$, und $T = 0$. Wir führen dimensionslosen $x = p/mc$ ein, und finden

$$PV = \gamma V \, c(mc)^4 \, \frac{1}{3} \int_0^{x_f} x^3 dx \, \partial_x \sqrt{1 + x^2}.$$

Es sei ferner

$$F(x) = \int_0^x x^3 dx \, \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \tfrac{1}{8}\left[(2x^3 - 3x)\sqrt{1+x^2} + 3\,\mathrm{arcsinh}(x)\right],$$

mit

$$F(x) \approx \frac{x^5}{5} \qquad x \ll 1,$$

$$F(x) \approx \frac{x^4}{4} \qquad x \gg 1.$$

Wir finden die allgemeine Form der $T = 0$ Zustandsgleichung,

$$P = \frac{\gamma c\,(mc)^4}{3}\, F\left[\left(\frac{3n}{\gamma}\right)^{1/3} \frac{1}{mc}\right].$$

Insbesondere, in dem Fall, wo der Fermiimpuls groß im Vergleich zu mc ist, d.h. $x_f \gg 1$, finden wir die Zustandsgleichung relativistischer $T = 0$ Fermionen

$$P = \frac{\gamma c}{12}\left(\frac{3n}{\gamma}\right)^{4/3}.$$

(Im Falle $p_f \ll mc$ ergibt sich die am Anfang hergeleitete Zustandsgleichung.)