UNIVERSITÄT LEIPZIG, ITP

Quantenmechanik II, WS2009/2010

Übungsblatt 2: Musterlösungen

Aufgabe 4

In dem fermionischen Zustand niedrigster Energie werden nur die "Wellenprofile" ψ_0 und ψ_1 besetzt. Es sei der zusätzliche Freiheitsgrad (die Profilen sind entartet) durch $\pm$ bezeichnet. Die Dreiteilchenwellenfunktionen $\psi_(x, y, z)$ müssen in den Koordinaten x, y, z antisymmetrisch sein. Ein möglicher Zustand niedrigster Energie ist zum Beispiel:

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{6}} \{\psi_0^+(x) \otimes \psi_0^-(y) \otimes \psi_1^+(z) + \psi_0^-(x) \otimes \psi_1^+(y) \otimes \psi_0^+(z) + \psi_1^+(x) \otimes \psi_0^+(y) \otimes \psi_0^-(z) -$$
$$- \psi_0^-(x) \otimes \psi_0^+(y) \otimes \psi_1^+(z) - \psi_0^+(x) \otimes \psi_1^+(y) \otimes \psi_0^-(z) - \psi_1^+(x) \otimes \psi_0^-(y) \otimes \psi_0^+(z)\}.$$

Dieser kann auch als

$$\psi(x,y,z) = \chi_{12}(x,y) \otimes \psi_1^+(z) + \text{Antisymmetrisierung in } x, y, z$$

wobei $\chi_{12}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{6}} [\psi_0^+(x) \otimes \psi_0^-(y) - \psi_0^-(x) \otimes \psi_0^+(y)]$, dargestellt werden. Die Entartung von ψ_2 muss auf eine Entartung des Grundzustandes führen. Tatsächlich stellt auch jeder Zustand von der Form

$$\psi(x,y,z) = \chi_{12}(x,y) \otimes \chi(z) + \text{Antisymmetrisierung in } x, y, z$$

mit einer beliebigen Linearkombination

$$\chi(z) = a\psi_1^+(z) + b\psi_1^-(z), \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

ein Zustand scharfer Energie

$$E_G = E_0 + E_0 + E_1$$

dar.

Aufgabe 5

Es gilt

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle.$$

Sollte dieser Zustand dem $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ äquivalent sein, so musste $ac = 0 = bd$, was aber den Gleichungen $ad = \frac{1}{\sqrt{2}} = -bc$ widerspricht.

Aufgabe 6

Nimmt man an, dass f und g normiert sind, so wird die Zweiteilchenwellenfunktion

$$\psi_{12}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-(f,g)^2}} \left[f(x)g(y) - g(x)f(y)\right], \tag{1}$$

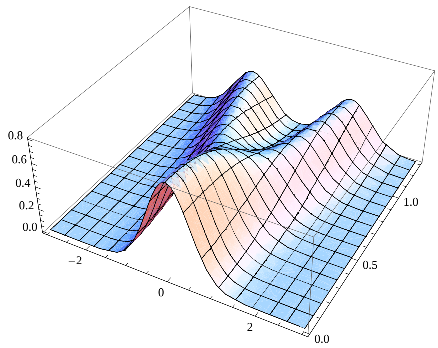
auch normiert. Für reelle f,g findet man zusätzilch

$$\rho(x) = \int |\psi_{12}(x,y)|^2 \, dy = \frac{1}{2[1-(f,g)^2]} \; \left[|f(x)|^2 + |g(x)|^2 - 2f(x)g(x)\,(f,g).\right] \tag{2}$$

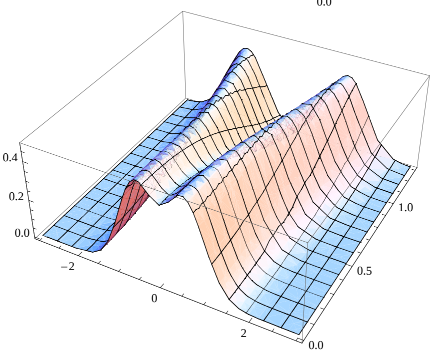
Sei jetzt $f(x) = (2/\pi)^{1/4} \exp[-(x-d)^2]$ und $g(x) = f(x+2d)$, dann

$$(f,g) = \exp[-2d^2]$$

Der Verlauf der Funktion $\rho(x)$ wurde am Abb.1. für veschiedene Werte von d (im fermionischen sowie bosonischen, in dem $-$ durch $+$ ersetzt werden soll, Fall) gezeigt. Man beachte den Maximalwert der Funktionen in beiden Fällen, sowie die relative Unabhängigkeit vom d für $d \ll 1$ im fermionischen Fall.



Bose Fall



Fermi Fall

Abbildung 1: $\rho(x)$ für Fermionen (unten) und Bosonen (oben) für $d \in [0,1]$.