UNIVERSITÄT LEIPZIG, ITP

Quantenmechanik II, WS2009/2010

Übungsblatt 1: Musterlösungen

Aufgabe 1

Die Eigenfunktionen, ψ_m, des Drehimpulsoperators, $J = -i\partial_\varphi$, zu den Eigenwerten $m \in \mathbb{R}$, erfüllen

$$-i\partial_\varphi \psi_m = m\psi_m$$

d.h. es gilt

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{im\varphi}.$$

Nun $\psi_m(0) = \psi_m(2\pi)$ gilt nur wenn m ganzzahlig ist, $m \in \mathbb{Z}$. Wegen der Periodizität ist auch leicht nachzuweisen, dass der Operator J symmetrisch ist.

Wir betrachten die Vertauschungsregel

$$[\hat{\varphi}, J] = i,$$

wobei wir zunächst annehmen, dass die Wirkung des Operators $\hat{\varphi}$ durch eine formelle Multiplikation mit φ gegeben ist (etwa wie für x und p auf einem intervall $[0, 2\pi]$ mit periodischen Randbedingungen). Obwohl die Vertauschungsregel scheint erfüllt zu sein, man stößt auf einige Probleme, wenn man die Matrixelemente von $\hat{\varphi}$ ausrechnen will

$$(\psi_n, [\hat{\varphi}, J]\psi_m) = (\psi_n, J\hat{\varphi} - \hat{\varphi}J\, \psi_m) = (m - n)(\psi_n, \hat{\varphi}\, \psi_m).$$

Anderseits führt die Vertauschungsregel auf

$$(\psi_n, [\hat{\varphi}, J]\psi_m) = (\psi_n, i\psi_m) = i\delta_{mn}.$$

Für $m \neq n$ erhalten wir also $(\psi_n, \hat{\varphi}\, \psi_m) = 0$, aber im Falle von $m = n$ sind wir auf ein Widerspruch $0 = i$ geführt.

Ein möglicher Ausweg aus dieser Schwierigkeit besteht darin, dass man die Äquivalenz von $[x, p] = i$ mit $[e^{ix}, p] = -e^{ix}$ nutzt (allgemein $[f(x), p] = if'(x)$). Bei der Relation

$$[e^{i\varphi}, J] = -e^{i\varphi}$$

treten nämlich die frühere Probleme nicht mehr (man beachte $(\psi_m, e^{i\varphi}\psi_n) = \delta_{m,n+1}$).

Es ist auch interessant zu sehen, dass die Probleme nicht auftreten, wenn ein System mit einem kontinuierlichen Spektrum von p betrachtet wird. In diesem Falle

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ipx}, \qquad p \in \mathbb{R},$$

und bei der Berechnung der Erwartungswerte von den beiden Seiten von $[x, p] = i$ erhält man eine Gleichung, die der distributionellen Identität

$$\delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x}$$

äquivalent ist.

Aufgabe 2

Diese Thematik wurde im Buch von M. Stone "Mathematics for Physics I" (verlinkt zu der QM2-Webseite), Seiten 257-267 dargestellt.

Aufgabe 3

Allgemein gilt für den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2 + \frac{1}{2}\,kx^2 = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\left(-\frac{\hbar}{\sqrt{km}}\partial_x^2 + \frac{\sqrt{km}}{\hbar}x^2\right).$$

Wir werden die dimensionslosen Größen verwernden,

$$x_D^2 = \frac{\sqrt{km}}{\hbar}x^2, \qquad p_D = -i\partial_{x_D}$$

ohne den D-Indizes. Bei der Skalierung $\tilde{k} = \alpha^4 k$ skalieren x und p wie folgt:

$$\tilde{x} = \alpha x \qquad \tilde{p} = p/\alpha.$$

Somit erhalten wir die zu beweisende Formel für $\tilde{a}$ und außerdem die Beziehung:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x}/\alpha + i\tilde{p}\alpha) = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\tilde{a} + \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\tilde{a}^* \equiv A\tilde{a} + B\tilde{a}^*. \tag{1}$$

Die alte Grundzustandswellenfunktion ψ_0 ist gegeben durch

$$\psi_0(x) = \pi^{-1/4}\exp(-x^2/2),$$

während die neue Grundzustandswellenfunktion kann durch das einsetzen von $\tilde{x}$ an der Stelle von x gewonnen werden, wobei noch die richtige Normierung beachtet werden muss. Wir finden

$$\tilde{\psi}_0(x) = \pi^{-1/4}\sqrt{\alpha}\exp(-\alpha^2 x^2/2),$$

(beide Funktionen sind auf 1 bzg. $(\psi, \psi) = \int dx\, |\psi(x)|^2$ normiert). Es muß nun gelten

$$a\psi_0 = 0 = (A\tilde{a} + B\tilde{a}^*) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{\psi}_n.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\tilde{\psi}_n$ müssen alle Koeffizienten auf der rechten Seite verschwinden. Mit Hilfe von $a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$, $a^*\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$ erhält man ein (unendliches) Gleichungssystem bzw. eine Rekursionsformel:

$$c_{m+1} = -\frac{B}{A}\sqrt{\frac{m}{m+1}}\, c_{m-1},$$

und zusätzlich $c_1 = 0$ (Koeffizient vor $\tilde{\psi}_1$). Folglich verschwinden alle ungeraden c_m's. Für die geraden Koeffizienten finden wir z.B:

$$c_6 = \left(-\frac{B}{A}\right)^3 \sqrt{\frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}}\, c_0,$$

und allgemein

$$c_{2k} = \left(-\frac{B}{A\sqrt{2}}\right)^k \sqrt{\frac{(2k)!}{(k!)^2}}\, c_0,$$

(alle c_m hängen noch von c_0 ab.) c_0 kann bestimmt werden, entweder indem man den Ausdruck

$$(\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}_0) = |c_0|^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{B}{A\sqrt{2}}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

gleich 1 setzt, oder aus dem Skalarprodukt:

$$c_0 = (\tilde{\psi}_0, \psi_0) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int dx\, \exp(-x^2/2 - \alpha^2 x^2/2),$$

Es ergibt sich

$$c_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}}.$$

Auf diese Weise läßt sich also die folgende Formel beweisen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(1-\alpha^2)^2}{2(1+\alpha^2)^2}\right]^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}.$$