Prof. Dr. R. Verch
Dipl. Phys. D. Rings, Dipl. Phys. S. Sturm

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2009/10

Übungen zur Quantenmechanik (B.Sc. Physik Modul TP3)
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 19 Im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$ seien zwei symmetrische Operatoren P und Q gegeben, jeweils mit den Eigenschaften: $D(P) = D(Q) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $P\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $Q\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, sowie

$$[Q, P] = i\eta \mathbb{1} \quad \text{auf } \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

mit einer Konstanten $\eta > 0$. Zeigen Sie, dass die Operatoren nicht beschränkt sein können.

Aufgabe 20 [Diese Aufgabe wird korrigiert und gewertet, Wert = 6 Punkte] Betrachten Sie den Hamiltonoperator H eines Teilchens der Masse m in einem harmonischen Oszillatorpotential in einer räumlichen Dimension, der im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$ auf $D(H) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert ist durch

$$(H\psi)(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{1}{2}Kx^2\psi(x)\,, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Dabei ist K eine positive Konstante (der Dimension [Kraft/Länge]).

(i) Zeigen Sie, dass der Operator H symmetrisch und positiv ist.

(ii) Betrachten Sie folgende, für $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definierte Operatoren:

$(A\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha x\psi(x) + \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\psi(x))\,,\qquad (A^\dagger\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha x\psi(x) - \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\psi(x))\,,$

mit $\alpha = (\sqrt{mK}/\hbar)^{1/2}$.

Weisen Sie folgende Eigenschaften dieser Operatoren nach:

(a) $AA^\dagger - A^\dagger A = \mathbb{1}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(b) $H = \hbar\omega_0(\frac{1}{2}\mathbb{1} + A^\dagger A)$ mit $\omega_0 = \sqrt{K/m}$.

(c) Wenn ψ_λ Eigenvektor von H zum Eigenwert λ ist, so folgt: $A\psi_\lambda$ ist Eigenvektor von H zum Eigenwert $\lambda - \hbar\omega_0$, und $A^\dagger\psi_\lambda$ ist Eigenvektor von H zum Eigenwert $\lambda + \hbar\omega_0$.

(d) $(A\psi, \varphi) = (\psi, A^\dagger\varphi)$ für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wobei $(f, g) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(x)\,dx$ das Skalarprodukt von $L^2(\mathbb{R}, dx)$ ist.

/...2

Aufgabe 21 Die Hermite-Funktionen $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sind definiert durch

$h_n(x) = c_n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$,

$c_n = (-1)^n / (\pi^{1/4} 2^n \sqrt{n!})$ ist dabei so gewählt, dass $(h_n, h_n) = 1$.

Benutzen Sie die Aussagen der vorangegangenen Aufgabe um zu zeigen, dass die Funktionen $\psi_{\lambda(n)}(x) = \nu_n h_n(\alpha x)$, $x \in \mathbb{R}$, mit geeigneten Normierungsfaktoren ν_n ein orthonormiertes System aus Eigenvektoren des Operators H (wie in Aufgabe 20 definiert) zu Eigenwerten $\lambda(n)$ bilden. Bestimmen Sie ν_n und $\lambda(n)$. Schliessen Sie aus der als bekannt vorausgesetzten Tatsache, dass der von den Hermite-Funktionen aufgespannte komplexe Vektorraum dicht in $L^2(\mathbb{R}, dx)$ liegt, dass die $\psi_{\lambda(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, sogar eine ONB des $L^2(\mathbb{R}, dx)$ sind. Geben Sie als Folgerung dessen das Spektrum $\mathrm{spec}(H)$ des Operators H an.

Abgabe: Am Mittwoch, 2. Dez., in der VL.