

---

Übungen zur Quantenmechanik (B.Sc. Physik Modul TP3)  
Aufgabenblatt 6

---

**Aufgabe 16 [Diese Aufgabe wird korrigiert und gewertet, Wert = 6 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die Funktionen  $\chi_m(x) = N_m e^{imx}$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ , ein Orthonormalsystem in  $L^2([0, 2\pi], dx)$  bilden, wenn die Normierungsfaktoren  $N_m$  geeignet gewählt werden (bestimmen Sie die  $N_m$  entsprechend). Schliessen Sie auf die Vollständigkeit des Orthonormalsystems aus der (als bekannt vorausgesetzten) Tatsache, dass jedes  $\varphi \in L^2([0, 2\pi], dx)$ , für das  $(\chi_m, \varphi) = 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt, der Nullvektor in  $L^2([0, 2\pi], dx)$  sein muss.

**Aufgabe 17**

(i) Die Funktion  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$\alpha(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

$\mu_\alpha$  sei das zugehörige Stieltjes-Maß. Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_\alpha = 2 \int_0^1 f(x)x dx.$$

(ii) Die Funktion  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$\alpha(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x \end{cases}$$

$\mu_\alpha$  sei das zugehörige Stieltjes-Maß. Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_\alpha = f(0).$$

*Hinweis:* Sie können die folgenden Sachverhalte benutzen:

(A) Jedes Stieltjes-Maß ist ein Lebesgue-Borel-Maß auf  $\mathbb{R}$

(B) Wenn zwei Lebesgue-Borel-Maße auf  $\mathbb{R}$  auf allen offenen, halboffenen und geschlossenen Intervallen übereinstimmen, dann sind sie gleich (d.h. sie stimmen auf allen Lebesgue-Borel-messbaren Mengen überein).

/...2

(C) Jede stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wird punktweise approximiert durch eine Folge von Treppenfunktionen

$$f_N(x) = \sum_{j=1}^{k_N} c_{N,j} \text{char}_{J_{N,j}}(x),$$

wobei die  $J_{N,j}$  offene, halboffene oder geschlossene Intervalle sind.

**Aufgabe 18** Für eine Menge  $Y$  mit Maß  $\mu$  wird definiert:

Erwartungswert von  $f \in L^1(Y, d\mu)$ :  $\langle f \rangle_\mu := \int_Y f d\mu / \int_Y 1 d\mu$ ,

Mittelwert von  $\mu$ :  $M_\mu := \langle m \rangle_\mu$  mit  $m(y) := y$ ,

Schwankungsquadrat von  $\mu$ :  $\sigma_\mu^2 := \langle m^2 \rangle_\mu - M_\mu^2$ .

Berechnen Sie den Mittelwert und das Schwankungsquadrat für die folgenden Fälle:

- (1)  $Y = \mathbb{R}$ ,  $d\mu(x) = e^{-(x-x_0)^2/2a^2} dx$ , wobei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $a > 0$  Konstanten sind ("Normalverteilung");
- (2)  $Y = (0, \infty)$ ,  $d\mu(x) = e^{-\lambda x} dx$  mit einer Konstanten  $\lambda > 0$  ("Exponentialverteilung");
- (3)  $Y = \mathbb{N}$ ,  $\mu(\{n\}) = \lambda^n/n!$  mit einer Konstanten  $\lambda > 0$  ("Poisson-Verteilung").

Abgabe: Am Mittwoch, 25. Nov. 2009, in der VL.