Prof. Dr. R. Verch
Dipl. Phys. D. Rings, Dipl. Phys. S. Sturm

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Institut für theoretische Physik
Wintersemester 2009/10

Übungen zur Quantenmechanik (B.Sc. Physik Modul TP3)
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 7 (wird korrigiert; Wert 6 Punkte) Die Wellenfunktion eines sich kräftefrei bewegenden Teilchens sei zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch

$$\psi(\vec{x}, 0) = N \mathrm{e}^{-|\vec{x}|^2/(2a^2)},$$

wobei N ein Normierungsfaktor ist so, daß $\int |\psi(\vec{x}, 0)|^2 \, d^3x = 1$, und $a = 1\,\mathrm{mm}$. Wie lange muß man warten, um das Teilchen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 1% außerhalb einer Kugel um $\vec{x} = 0$ mit Radius $R = 1\,\mathrm{cm}$ zu finden? Diskutieren Sie insbesondere die Fälle eines Elektrons, eines Protons und eines Uranatoms.

Hinweis: Werten Sie die am Ende auftretenden Integrale numerisch aus.

Aufgabe 8 Es sei $\psi(\vec{x}, t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung, mit $|\psi(\vec{x}, t)| > 0$. Man zeige, daß $\psi(\vec{x}, t)$ bis auf eine *konstante* Phase aus der Kenntnis von Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ und Stromdichte $\vec{j}_\psi(\vec{x}, t) := \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}(\overline{\psi}(\vec{x}, t) \vec{\nabla}_x \psi(\vec{x}, t))$ sowie des Potentials $V(\vec{x}, t)$ erhalten werden kann.

Hinweis: Nehmen Sie an, daß eine reelle, zweimal stetig differenzierbare Phasenfunktion $\phi(\vec{x}, t)$ existiert, so daß $\psi(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)| \mathrm{e}^{i\phi(\vec{x}, t)}$.

Aufgabe 9 Es sei $\psi_t(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x}, t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(\vec{x}, t)$; und $\langle \vec{P} \rangle_t := \langle \psi_t, \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi_t \rangle$, $\langle \vec{X} \rangle_t := \langle \psi_t, \vec{Q} \psi_t \rangle$. Überprüfen Sie die folgenden Beziehungen (Ehrenfestsche Sätze):

(i) $m \frac{d}{dt} \langle \vec{X} \rangle_t = \langle \vec{P} \rangle_t$,

(ii) $m \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{X} \rangle_t = \langle \psi_t, (-\vec{\nabla} V) \psi_t \rangle$.

Abgabe: Am Mittwoch, 4. Nov. 2009, in der VL.