Prof. Dr. R. Verch
Dipl. Phys. D. Rings, Dipl. Phys. S. Sturm

UNIVERSITÄT LEIPZIG
Inst. f. Theoretische Physik
Wintersemester 2009/10

Übungen zur Quantenmechanik (B.Sc. Physik Modul TP 5)
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 34 [Diese Aufgabe wird korrigiert und gewertet, Wert = 6 Punkte]
Berechnen Sie die Erwartungswerte und die Schwankungsquadrate der Komponenten L_j, $j = 1, 2, 3$, des Drehimpulsoperators in den normierten gemeinsamen Eigenzuständen $\chi_{\lambda,\mu}$ von L^2 und L_3, $\lambda = (\hbar^2)\ell(\ell+1)$, $\mu = -(\hbar)\ell, \ldots, (\hbar)\ell$. Es sei A ein beliebiger (beschränkter) symmetrischer Operator, der mit L_1 und L_2 vertauscht. Zeigen Sie, dass die Erwartungswerte von A in den Zuständen $\chi_{\lambda,\mu}$ nicht von μ abhängen. Beweisen Sie ferner, dass A auch mit L_3 kommutiert und bestimmen Sie daraus die Form der "Matrixelemente" $(\chi_{\lambda,\mu}, A\chi_{\lambda',\mu'})$ von A zwischen beliebigen Zuständen $\chi_{\lambda,\mu}, \chi_{\lambda',\mu'}$.

Aufgabe 35 Zeigen Sie, dass alle homogenen Polynome* $p_n(\underline{x})$ vom Grade n, die Lösung der Laplacegleichung $\Delta_{\underline{x}} p_n(\underline{x}) = 0$ sind, auch Eigenfunktionen des Differentialoperators L^2 sind, wobei $\underline{L} = (\hbar/i)\underline{X} \times \nabla_{\underline{x}}$. Für welche Werte von c erfüllen die Polynome $q_n(\underline{x}) = (x_1 + cx_2)^n$, $n \in \mathbb{N}$, die Laplacegleichung und wie wirken L_3 und L^2 auf die entsprechenden Polynome? Geben Sie auf der Basis dieser Ergebnisse ein rekursives Verfahren an, mit dem man die (unnormierten) Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}$ in kartesischen Koordinaten erhält.

* Ein homogenes Polynom vom Grad n ist von der Form $p_n(\underline{x}) = \sum_{a_1+a_2+a_3=n} C_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, wobei sich die Summe über endlich viele $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}_0^3$ erstreckt und die C_a komplexe Koeffizienten sind.

Aufgabe 36 Der Hamiltonoperator für einen rotierenden starren Körper ("Quantenkreisel") hat die Form

$$H = \frac{1}{2\Theta_1} L_1^2 + \frac{1}{2\Theta_2} L_2^2 + \frac{1}{2\Theta_3} L_3^2$$

wobei Θ_j, $j = 1, 2, 3$, die Hauptträgheitsmomente des Körpers sind und $\underline{L}$ der Drehimpulsoperator bezüglich eines körperfesten Bezugsystems mit den Vertauschungsrelationen

$$[L_1, L_2] = i(\hbar)L_3 \quad \text{etc. bei zykl. Permutation d. Indices.}$$

Begründen Sie die folgende Behauptung: Um die Eigenwerte von H zu bestimmen, reicht es aus, H auf allen $(2\ell+1)$-dimensionalen Unterräumen des Hilbertraumes zu untersuchen, die invariant unter den L_k sind und zum Eigenwert $(\hbar^2)\ell(\ell+1)$ von L^2 gehören. Die Berechnung der Eigenwerte von H kann somit zurückgeführt werden auf die Diagonalisierung von $(2\ell+1) \times (2\ell+1)$ Matrizen. Benutzen sie diese Methode um die Energiewerte eines Quantenkreisels mit Gesamtdrehimpuls $\ell = 1$ zu bestimmen.

/...2

Geben Sie auf der Basis dieses Ergebnisses eine grobe Abschätzung für die Größe der Rotationsenergie ("Energieskala") von Molekülen an, die aus wenigen leichten Atomen aufgebaut sind und deren Abstand etwa 10^{-8}cm beträgt.

Abgabe: Am Mittwoch, den 20.01.2010 vor der VL.