
Übungen zur Quantenmechanik (B.Sc. Physik Modul TP 5)
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 31 [Diese Aufgabe wird korrigiert und gewertet, Wert = 6 Punkte]

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m bewege sich auf der reellen Achse unter dem Einfluss des Potentials

$$V(x) := \begin{cases} -V_0 & \text{falls } -L < x < L \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

hierbei sind L, V_0 vorgegebene positive Konstanten.

Berechnen Sie für eine von rechts mit der Energie $E > 0$ einlaufende ebene Welle die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten $R(E)$ und $T(E)$. Zeigen Sie, dass es eine Folge von Energien E_n gibt, für die $|T(E_n)|^2 = 1$ gilt ("Transmissionsresonanzen"), während $R(E) \neq 0$ für alle anderen Energien gilt. Skizzieren (oder plotten) Sie $|T(E)|^2$.

Aufgabe 32 Ein qualitatives eindimensionales Modell eines Moleküls, das aus zwei Atomen besteht, die durch ein Elektron gebunden werden, erhält man, wenn man die Wechselwirkung des Elektrons mit den Atomen durch das "Deltafunktions"-Potential

$$V(x) = -g\delta(x + R) - g\delta(x - R)$$

beschreibt. Dabei werden die Atome als an den Punkten $x = \pm R$ ruhend und unendlich schwer angenommen. Die Anschlussbedingungen für ein χ , das die stationäre Schrödingergleichung löst, verstehen sich dabei an den Stellen $\rho_{\pm} = \pm R$ als

$$\chi \text{ stetig,} \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\chi'(\rho_{\pm} + r) - \chi'(\rho_{\pm} - r)) = \frac{2mg}{\hbar^2} \chi(\rho_{\pm}).$$

Für welche Werte von g besitzt das Elektron zwei Bindungszustände (Grundzustand und Anregungszustand)?

Aufgabe 33: Ein Teilchen der Masse m in einer Dimension bewege sich unter dem Einfluss des periodischen Potentials

$$V(x) := \begin{cases} \frac{c}{b} & \text{falls } -b \leq x < 0 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq x < a, \end{cases}$$

$$V(x + b + a) = V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hierbei sind a, b, c vorgegebene positive Konstanten.

/...2

Skizzieren Sie den Potentialverlauf und zeigen Sie:

Die Energieeigenwerte $E \in (0, c/b)$ derjenigen (nicht normierbaren) Eigenfunktionen χ_E , die den beiden Bedingungen

(i) χ_E ist einmal stetig differenzierbar,

(ii) es gibt $\phi \in \mathbb{R}$ so, dass $\chi_E(x + b + a) = e^{i\phi} \chi_E(x) \forall x \in \mathbb{R}$ genügen, erfüllen die transzendente Ungleichung

$$(*) \quad \left| \cosh(\kappa b) \cos(ka) + \frac{\kappa^2 - k^2}{2\kappa k} \sinh(\kappa b) \sin(ka) \right| \leq 1,$$

wobei $\kappa := \sqrt{2m(c/b - E)/\hbar^2}$, $k := \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

Führen Sie bei festgehaltenem a und c den Grenzübergang $b \rightarrow 0$ durch ("Kronig-Penny-Potential"), und bestimmen Sie für diesen Grenzfall die "Bandgrenzen", d.h. die E -Werte, bei denen (*) den maximalen Wert 1 annimmt (nur qualitativ: graphisch, anhand einer Skizze oder eines Computerplots).

Hinweis: Auf den Intervallen $(-b, 0)$ und $(0, a)$ ist χ_E jeweils von der Form einer allgemeinen Lösung der stationären Schrödingergleichung. Wegen der Periodizitätsforderung (ii) folgt, dass χ_E auf ganz \mathbb{R} durch vier zunächst freie Konstanten $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ festgelegt wird. Die Anschlussbedingungen aus (i) und (ii) liefern Einschränkungen an diese Konstanten in Form eines homogenen linearen Gleichungssystems

$$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \mathbf{K} = (0, 0, 0, 0)$$

mit einer 4×4 -Matrix \mathbf{K} . Nichttriviale Lösungen existieren, falls die Determinante der Koeffizientenmatrix \mathbf{K} verschwindet. Die dafür notwendigen Bedingungen führen schließlich auf die Ungleichung (*).

Abgabe: Am Mittwoch, 13.01.2010, vor der VL.