Prof. Dr. K. Sibold
Dr. P. Marecki

Wintersemester 2008/09

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 33

Die Pauli-Matrizen sind selbstadjungierte Operatoren im zwei-dimensionalen Hilbertraum. Sie sind durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

definiert. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sigma_i \sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}, \tag{2}$$

$$\exp(i\alpha\vec{n}\vec{\sigma}) = \cos(\alpha) + i\vec{n}\vec{\sigma}\sin(\alpha), \tag{3}$$

wobei $\vec{n}$ ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 34

Die Wechselwirkung eines quantenmechanischen Systems, das nur aus zwei Energieniveaus besteht, mit einer elektromagnetischen Welle kann mit Hilfe des Hamilton-Operators:

$$H = \frac{E}{2}\sigma_3 + D \cdot \begin{pmatrix} 0 & \exp(-iEt) \\ \exp(iEt) & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

modelliert werden (wobei D eine reele Konstante bezeichnet). Betrachten Sie die erste Teil von H als H_0 und die zweite als $V(t)$ (Störung). Bestimmen die Zeit-Entwicklung eines Vektors, der zur Zeit $t = 0$ die Form

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt. Zu diesem Zweck, gehen Sie zum Wechselwirkungsbild über, und lösen Sie die Schrödingergleichung

$$i\frac{d\psi_I}{dt} = V_I(t)\psi_I, \tag{5}$$

wobei

$$V_I(t) = \exp(iH_0 t)\, V(t)\, \exp(-iH_0 t). \tag{6}$$

Aufgabe 35
Ein Zwei-Niveau-System werde mit einem elektromagnetischen Wellenpaket bestrahlt:

$$H = \frac{E}{2}\sigma_3 + f(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \exp(-iEt) \\ \exp(iEt) & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

wobei $f(t)$ explizit von der Zeit abhängt. Gehen Sie zum Wechselwirkungsbild über, setzen Sie

$$\psi_I = a(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

und finden Sie, aus der Schrödingergleichung

$$i\frac{d\psi_I}{dt} = V_I(t)\psi_I, \tag{9}$$

die Differentialgleichung für $a(t)$. Lösen Sie diese formal für eine beliebige Funktion $f(t)$.

Hinweis: Die Differentialgleichung für $a(t)$ vereinfacht sich wenn statt t die Variable $\tau = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$ benutzt wird.

Abgabe: Am Donnerstag, den 22.1.2009 in der Vorlesung.