Prof. Dr. K. Sibold
Dr. P. Marecki

Wintersemester 2008/09

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

---

# Übungen zur Quantenmechanik
# Aufgabenblatt 9

---

**Aufgabe 25**

Bestimmen Sie die Lösungen der freien Schrödinger-Gleichung in drei Dimensionen,

$$-\nabla^2\psi = k^2\psi \tag{1}$$

mit Hilfe des Separationsansatzes

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R_{\ell k}(r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \tag{2}$$

d.h. lösen Sie die Gleichung

$$-\frac{1}{r^2}\partial_r[r^2\partial_r R_{\ell k}] + \frac{\ell(\ell+1)R_{\ell k}}{r^2} = k^2 R_{\ell k}, \tag{3}$$

zunächst für $\ell = 0$ und dann auch für $\ell = 1$. Sei nun eine Randbedingung $\psi|_{r=\pi} = 0$ gegeben. Bestimmen Sie die Energieniveaus im Fall $\ell = 0$.
*Hinweis:* Versuchen Sie $R_{1k} = \partial_r R_{0k}$. Lösungen zu beliebigen $\ell$ lassen sich mit Hilfe ähnlicher Manipulationen bestimmen.

**Aufgabe 26**

Untersuchen Sie die Algebra der abstrakten Operatoren $J_1, J_2, J_3$ mit den Vertauschungsrelationen

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J^c, \qquad a,b,c = 1\ldots 3. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass $[J^2, J_a] = 0$ wobei $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$. Es sei

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2. \tag{5}$$

Berechnen Sie die Kommutatoren $[J_3, J_\pm]$, und drücken Sie $J_+J_-$ sowie $J_-J_+$ durch $J^2$ und $J_3$ aus. Es sei $\psi_m$ ein Eigenvektor von $J^2$ und $J_3$:

$$J^2\psi_m = \lambda\psi_m, \qquad J_3\psi_m = m\,\psi_m. \tag{6}$$

Sind $J_+\psi_m$ und $J_-\psi_m$ auch Eigenvektoren von $J^2$ und $J_3$? Drucken Sie die Normen $\|J_+\psi_m\|$ und $\|J_-\psi_m\|$ durch $\lambda$ und $m$ aus. Schließen Sie, dass es müssen extreme Vektoren $\psi_M$, $\psi_N$ existieren[1] mit

$$J_+\psi_M = 0, \qquad J_3\psi_M = M\,\psi_M, \tag{7}$$

$$J_-\psi_N = 0, \qquad J_3\psi_N = N\,\psi_N. \tag{8}$$

Zeigen Sie $\lambda = M(M+1)$ und bestimmen Sie die zugelassene Zahlen $M > 0$.

**Aufgabe 27**

Betrachten Sie die Bahndrehimpulsalgebra $J_a = L_a$. Mit Hilfe der in der Vorlesung bewiesenen Formeln

$$L_x = i(\sin\varphi\partial_\theta + \cot\theta\cos\varphi\partial_\varphi), \tag{9}$$

$$L_y = i(-\cos\varphi\partial_\theta + \cot\theta\sin\varphi\partial_\varphi), \tag{10}$$

$$L_z = -i\partial_\varphi. \tag{11}$$

verifizieren Sie die folgende Form von $L_\pm$:

$$L_\pm = e^{i\varphi}(\pm e^{\pm i\varphi}\partial_\theta + \cot\theta\partial_\varphi). \tag{12}$$

Betrachten Sie den Sektor der Eigenvektoren von $L^2$ zum Eigenwert $\ell(\ell+1)$, $\ell = 1$. Aus den (Differential-)Gleichungen $L_+\psi_1 = 0$, $L_z\psi_1 = \psi_1$ (bzw. $L_-\psi_{-1} = 0$, $L_z\psi_{-1} = -\psi_{-1}$) bestimmen Sie die (funktionelle-) Form von den extremen Vektoren $\psi_{\pm 1}(\theta,\varphi)$ sowie die Form von $\psi_0 = L_+\psi_{-1}$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit $Y_{1m}(\theta,\varphi)$, $m = \pm 1, 0$.

**Aufgabe 28**

Bestimmen Sie die volle Familie der Eigenvektoren von $J_3$ und $J^2$ für

i) $J_a = S_a$, $J^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)$ mit

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{13}$$

ii) $J_a = T_a$, $J^2 = 1(1+1)$ mit

$$T_1 = i\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad T_2 = -i\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad T_3 = i\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}, \tag{14}$$

Verifizieren Sie die Vertauschungsrelationen (4).

**Aufgabe 29**

Zeigen Sie dass $x \pm iy = r\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1\,\pm 1}(\theta,\varphi)$, $z = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_{1\,0}(\theta,\varphi)$. Berechnen Sie die Matrixelemente

$$(Y_{\ell m}, A\,Y_{\ell n})_S, \tag{15}$$

für $\ell = 1$, $A = x, z, x^2, z^2$ und $m, n = -\ell \ldots \ell$. Hier bezeichnet $(f,g)_S = \int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \overline{f} g$ den Skalarprodukt auf der Einheitssphäre.

**Abgabe: Am Donnerstag, den 8.1.2009 in der Vorlesung.**

[1] Eigenvektoren von $J_3$ zu den Eigenwerten $M, N$ und von $J^2$ zum Eigenwert $\lambda$.