Prof. Dr. K. Sibold
Dr. P. Marecki

Wintersemester 2008/09

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 22[Theorieaufgabe]
Sei ψ_0 die Wellenfunktion eines Zustands zur niedrigsten Energie $E_0 < 0$. Zeigen Sie, dass alle andere normierten Funktionen f (d.h. $||f||^2 = (f, f) = 1$) die Ungleichung

$$(f, Hf) \geq E_0$$

erfüllen.

Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Methode eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie des Quantenteilchen,

$$H\psi = -\frac{\hbar^2 \psi''}{2m} + V(x)\psi,$$

im Delta-Potential:

$$V = -g\delta(x).$$

Verwenden Sie die Versuchsfunktion

$$\psi_a(x) = Ne^{-ax^2/2},$$

Normieren Sie diese Funktion, berechnen Sie den Erwartungswert von H, bestimmen Sie den besten "a" und die Schranke für die Energie. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Energie.

Aufgabe 23
Betrachten Sie einen isotropen, harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen (x und y gleichwertig) als zwei unabhängige Oszillatoren , etwa:

$$H = \frac{1}{2}\left[p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2\right], \tag{1}$$

$p_x = -i\partial_x$, $p_y = -i\partial_y$. Führen Sie die Erzeugungs- und Vernichtungs-operatoren a^*, a für die Bewegung in der x-Richtung, und b^*, b für die Bewegung in der y-Richtung, ein. Überzeugen

Sie sich, dass der Kommutator der Operatoren a und b (und deren Adjungierten) verschwindet. Der Drehimpulsoperator ist definiert als

$$J = -i\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

wobei φ für den Winkel $\varphi = \arctan(y/x)$ steht.

- Drücken Sie J durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus und verifizieren Sie, dass er selbstadjungiert ist.
- Berechnen Sie die Kommutatoren $[J, a],\ [J, b], [J, a^*],\ [J, b^*]$.
- Betrachten Sie die (angeregten) Zustände

  $$\psi_a = a^*\psi_0,$$
  $$\psi_+ = \frac{a^* + ib^*}{\sqrt{2}}\psi_0,$$

  (wobei ψ_0 der Grundzustand ist, d.h. ψ_0 wird von a und b annihiliert) und zeigen Sie, dass ψ_+ Eigenzustand des Drehimpulsoperators J ist; gilt das auch für ψ_a?

Aufgabe 24

Die Energieniveaus in der Aufgabe 23 sind entartet (es gibt mehr als ein Eigenzustand zu einer Energie E). Berechnen Sie $[H, J]$ und bestimmen Sie die Familien der ein- und zwei-mal angeregten Zustände. In beiden Familien führen Sie eine Orthonormalbasis von Energieeigenvektoren die zusätzlich Eigenvektoren von J sind.

Überlegen Sie sich in welchem Raumgebiet die Wellenfunktionen der ersten angeregten Zustände wesentlich lokalisiert sind, und berechnen Sie die quantenmechanischen elektrischen Ströme

$$j_i^{\psi} = \frac{1}{2m}\left[\overline{\psi}p_i\psi + \overline{p_i\psi}\psi\right],$$

mit

$$p_i = -i\hbar\partial_i.$$

Skizzieren Sie diese Ströme.

Abgabe: Am Donnerstag, den 11.12.2008 in der Vorlesung.