Prof. Dr. K. Sibold

Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 16 [Fortsetzung der A14, Theorieaufgabe]
Lösungen wie (1) und (2) in der Aufgabe 14 sind stationäre Lösungen der Schrödingergleichung, d.h. deren Dynamik ist trivial. Jedoch man sagt, dass z.B. (1) eine von Links einlaufende Welle beschreibt, die mit der Amplitude ρ_- reflektiert und mit der Amplitude σ_- transmittiert wird. Wir schreiben

$$e^{ikx} \to \rho_- e^{-ikx} + \sigma_- e^{ikx}, \tag{1}$$

wobei der auf der linken Seite stehende Term die einlaufende- und die auf der rechten Seite stehende Terme die auslaufende Wellen beschreiben sollen. Überlegen sie wie weit und im welchen Sinne ist diese Denkweise berechtigt. Assoziieren Sie formal zu der stationären Lösung der Schrödingergleichung

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + \beta e^{-ikx} & x < 0 \\ Be^{-ikx} + \alpha e^{ikx} & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

den Streuprozess

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \equiv Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \to \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx} \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathbb{S} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{4}$$

wobei $\mathbb{S}$ die in der Aufgabe 14 betrachtete Streumatrix bezeichnet. Welche Rolle spielt die Unitarität dieser Matrix[1]? Was ist die Interpretation der Eigenzustände dieser Matrix, und welchen stationären Lösungen entsprechen sie[2]?

[1] Diese Aufgabe zeigt, dass die Streuprozesse als unitäre Transformationen in dem zweidimensionalen Hilbertraum (zu festen $E = k^2$) aufgefasst werden können.

[2] Schreiben Sie die Eigenwerte als $\lambda = e^{2i\delta}$ und setzen Sie die Symmetrie des Potentials, d.h. $\sigma_- = \sigma_+ = \sigma$, $\rho_- = \rho_+ = \rho$, vom Anfang an voraus.

Aufgabe 17
Betrachten Sie nochmal (s. A8) das Potential

$$V(x) = -g\delta(x+R) - g\delta(x-R) \tag{5}$$

und bestimmen Sie die Streuamplituden σ und ρ als Funktionen von $\mu = k{\cdot}R$ und g. Skizzieren Sie $T(\mu) = |\sigma|^2$ für verschiedene Werte von g.

Aufgabe 18[3]
Betrachten Sie ein freies Teilchen im harmonischen Potential,

$$V(x) = \tfrac{1}{2}kX^2. \tag{6}$$

Führen Sie dimensionslose Größen x, p, ein, so dass der Hamiltonian die Form

$$H = \hbar\omega(p^2/2 + x^2/2) \tag{7}$$

annimmt (hier, $\omega = \sqrt{k/m}$ steht fär die klassiche Frequenz der Schwingung). Betrachten Sie die Operatoren

$$a = (x + ip)/\sqrt{2} \tag{8}$$
$$a^* = (x - ip)/\sqrt{2}. \tag{9}$$

- Zeigen Sie, dass

$$[a, a^*] = 1 \tag{10}$$
$$H = \hbar\omega(a^*a + 1/2) \tag{11}$$
$$[a, H] = \hbar\omega a \tag{12}$$

- Mit Hilfe dieser Relationen beweisen Sie, dass wenn ψ_E ein gebundener Zustand zur Energie E ist, dann

$$H(a\psi_E) = (E - \hbar\omega)(a\psi_E) \tag{13}$$
$$H(a^*\psi_E) = (E + \hbar\omega)(a^*\psi_E), \tag{14}$$

  d.h. die Funktionen $a\psi_E$, $a^*\psi_E$ wieder Eigenfunktionen von H sind, zu den Eigenwerten $E \mp \hbar\omega$.

- Überzeugen Sie sich, dass die Quadrate, A^2, von selbstadjungierten Operatoren A immer positiv sind, d.h. $(\psi, A^2\psi) \geq 0$ fär alle Funktionen ψ. Schließen Sie daraus, dass der Hamiltonoperator, H, positiv ist und damit keine negative Eigenwerte besitzt.

- Zeigen Sie, dass es einen (eindeutigen) Zustand geben muss, der durch a annihiliert wird, d.h. $a\psi_0 = 0$. Benutzen Sie diese Gleichung um die Funktion $\psi_0(x)$ explizit zu bestimmen, und normieren Sie sie.

Abgabe: Am Montag, den 1.12.2008; genaue Abgabehinweise werden auf der QM-Webseite bekanntgemacht.

[3] A18 ist die erste der zu dem Problem des quantenmechanischen harmonischen Oszillator gehörigen Aufgaben. Obwohl sie standard ist, und die Lösung kann sicherlich im jeden QM-Buch gefunden werden, es wird an dieser Stelle *stark empfohlen* diese elementare Aufgabe selbständig zu bearbeiten; die in dieser Aufgabe entwickelte "algebraische" Lösungsmethode findet Anwendungen *fast in allen Bereichen der Quantenphysik.*