Prof. Dr. K. Sibold

Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 13

Es sei ein quantenmechanisches Teilchen (in 1D) in einem elektrostatischen Potential $V(x) < 0$ gegeben. Das Potential sei verschwindend für $|x| > R$. Überlegen Sie wieso die Bindungszustände ($E < 0$) nicht entartet sind, d.h. zeigen Sie, dass es nur eine Eigenfunktion $\psi_E(x)$ zu jeder zugelassenen (Bindungs-) Energie E gibt. Schliessen Sie daraus, dass bei symmetrischen Potentialen, $V(x) = V(-x)$, die Eigenfunktionen entweder symmetrisch ($\psi_E(-x) = \psi_E(x)$) oder antisymmetrisch ($\psi_E(-x) = -\psi_E(x)$) sein müssen.

Aufgabe 14

Untersuchen sie die Streuzustände eines quantenmechanischen Teilchens in einem Potential $V(x)$ wie in der Aufgabe 13 (Symmetrie zunächst nicht vorausgesetzt). Die Zustände seien durch die asymptotische Form der Wellenfunktion spezifiziert:

$$\psi^- \to \begin{cases} e^{ikx} + \rho_- e^{-ikx}, & x \to -\infty \\ \sigma_- e^{ikx}, & x \to +\infty, \end{cases} \tag{1}$$

$$\psi^+ \to \begin{cases} \sigma_+ e^{-ikx}, & x \to -\infty \\ e^{-ikx} + \rho_+ e^{ikx}, & x \to +\infty, \end{cases} \tag{2}$$

wobei σ und ρ komplexe Funktionen von k bezeichnen. Verwenden Sie die x-Unabhängigkeit der Wronski-Determinante, $W(\psi, \chi) = \psi\chi' - \psi'\chi$, für die Funktionen ψ^+, ψ^- und deren Komplexkonjugierten um die folgenden Relationen zu verifizieren:

- $\sigma_+ = \sigma_- \stackrel{\text{def}}{=} \sigma$,
- $|\sigma|^2 + |\rho_\pm|^2 = 1$,
- $\rho_-\overline{\sigma} + \overline{\rho}_+\sigma = 0$,

- die folgende (Streu-) Matrix ist unitär

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & \rho_+ \\ \rho_- & \sigma \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Zeigen Sie ferner, dass im Falle eines symmetrischen Potentials ($V(x) = V(-x)$ gilt: $\rho_+ = \rho_-$.

Aufgabe 15

Berechnen Sie die Koeffizienten $\rho_\pm, \sigma$ sowie die beiden Eigenwerte

$$\lambda_i = e^{2i\delta_i}, \qquad i = 0, 1 \tag{4}$$

der S-Matrix im Falle einer Streuung am Delta-Potential $V(x) = -g\delta(x)$. Drucken Sie δ_0 und δ_1 als Funktionen von k aus. Zeigen Sie letztlich, dass die Funktion $\sigma(k)$ einen Pol bei (pur-imaginären) k_0 hat, der mit der Energie des Bindungszustands (E_0) durch

$$E_0 = k_0^2 \tag{5}$$

verbunden ist.

Abgabe: Am Donnerstag, den 20.11.2007 in der Vorlesung.