Prof. Dr. K. Sibold

Dr. P. Marecki

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Inst. f. Theoretische Physik

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Quantenmechanik
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 10
Untersuchen Sie die Vollständigkeit des in der Aufgabe 6 gefundenen Systems der Energie-Eigenfunktionen.

Aufgabe 11
Betrachten den zwei-dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. (Die zu diesem Raum gehörige Vektoren haben nur zwei Komponenten.) Auf $\mathcal{H}$ es seien die folgenden zwei Operatoren

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

definiert. Zeigen Sie, dass die Operatoren selbstadjungiert sind. Bestimmen Sie deren Eigenwerte und die zugehörige Eigenvektoren. Finden Sie die unitäre Transformation U die die beiden Basis (der Eigenvektoren von σ_2 und σ_3) verknüpft, etwa

$$Ue_i = f_i,$$

mit $i = 1, 2$, und

$$\sigma_2 e_i = \lambda_i \, e_i, \quad \sigma_3 f_i = \ell_i \, f_i,$$

wobei λ_i und ℓ_i die Eigenwerte bezeichnen.

Zusatzaufgabe: Formulieren Sie die für σ_2 und σ_3 gültige Heisenbergsche Unschärferelation, und diskutieren Sie sie an den Beispielzustände e_1 und f_1.

Aufgabe 12

Ein Teilchen bewegt sich auf einem Intervall $x \in [0, 2\pi]$ und das Verhalten an den Intervalenden wird durch die Randbedingung

$$\psi(0) = e^{i\alpha}\psi(2\pi), \tag{1}$$
$$\psi'(0) = e^{i\alpha}\psi'(2\pi), \tag{2}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ modelliert. Argumentieren Sie, dass der Hamiltonoperator

$$H = -\frac{d^2}{dx^2}$$

selbstadjungiert ist, und bestimmen Sie sein Spektrum (Menge aller Eigenwerte). Finden Sie die Energieeigenzustände und diskutieren Sie deren Vollständigkeit.

Abgabe: Am Donnerstag, den 13.11.2007 in der Vorlesung.